УДК 621.372.064 **Є.І. Болонна, Г.М. Розорінов, П.М. Шпатар**

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОГО ХАОСУ В ГЕНЕРАТОРІ КОЛПІТЦА У ПРОГРАМНОМУ КОМПЛЕКСІ MATHEMATICA

Побудована математична модель нелінійних процесів в генераторі Колпітца. Побудовані діаграми динамічних режимів в середовищі Wolfram Mathematica 7.0. Зроблено оцінки параметрів генератора хаотичної динаміки, який можна застосовувати не тільки як самостійну одиницю для захисту інформації, а також у складі різноманітних комплексів, зокрема, у протоколах квантової передачі ключа.

Ключові слова: генератор Колпітца, хаотична динаміка, математична модель, біфуркаційна діаграма.

Вступ

В електричних схемах, які містять нелінійний елемент, виникають явища самоорганізації і детермінованого хаосу. В роботах голландського фізика і інженера Б. Ван-дер-Поля проводилися дослідження класичної моделі нелінійної системи з періодичними автоколиваннями. Було виявлено явище синхронізації при певних раціональних співвідношеннях частоти збудження та власної частоти і шумоподібні коливання при переходах між областями захоплення. В роботах, присвячених математичному дослідженню рівняння автогенератора при періодичному зовнішньому збудженні, була виявлена складність динаміки, зокрема, наявність у системи нескінченного числа нестійких періодичних орбіт [1, 2]. Це вплинуло на створення основ математичної теорії складної динаміки і хаосу. Тому досить часто виникають питання придатності електричних схем генераторів з нелінійними елементами для хаотичних систем. Математична модель дозволяє визначити межі застосування і параметри генераторів хаосу. У зв’язку з цим виникають наступні задачі: опис динаміки в нелінійному елементі генератора; побудова відповідної математичної моделі нелінійної схеми; проведення моделювання.

Модель процесів в генераторі Колпітца

Більшість розроблених генераторів хаосу відносяться до області відносно невисоких частот порядку 10÷100 МГц в силу специфіки елементів схеми. До числа генераторів, які дозволяють створювати хаотичні коливання в частотному діапазоні до декількох гігагерц відносяться генератори Колпітца, побудовані на основі трьохточкової схеми [3]. Незважаючи на те, що генератор Колпітца вивчений давно, актуальним є питання побудови математичної моделі в хаотичному режимі та визначення параметрів системи. Принципова схема генератора Колпітца зображена на рис.1.

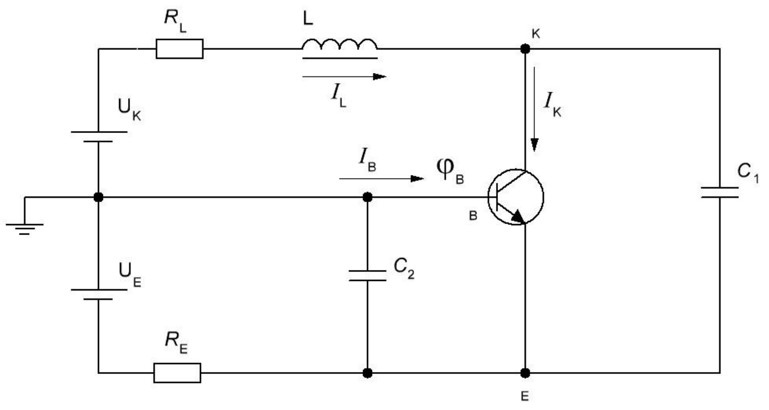


Рис. 1. Принципова схема генератора Колпітца

Генератор містить один нелінійний елемент – біполярний транзистор. Зворотний зв'язок генератора утворений індуктивністю L з опором R_L та подільником напруги на конденсаторах C_1 і C_2. Робоча частота транзистора встановлюється з допомогою напруг U_K ,U_E і опору R_E. Реактивні елементи, які входять в склад генератора, визначають основну частоту сигналу

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}. \tag{1}$$

Математична модель генератора Колпітца має вигляд:

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dU_{KE}}{dt} = I_L - I_K \\ C_2 \dfrac{dU_{BE}}{dt} = -\left(\dfrac{U_E + U_{BE}}{R_E} + I_L + I_B \right), \\ L\dfrac{dL}{dt} = U_K - U_{KE} + U_{BE} - I_L R_L \end{cases} \tag{2}$$

де U_{KE} і U_{BE} – напруги на колектор-емітер і база-емітер, I_L, I_K, I_B – струми індуктивності, колектора і бази, відповідно.

Найбільш простою моделлю транзистора є його розгляд як двохсегментного кусково-лінійного резистора, керованого напругою, і лінійного джерела струму, керованого струмом. У відповідності з цією моделлю

$$I_B = \begin{cases} 0, & якщо\, U_{BE} \le U_{пор}; \\ \dfrac{U_{BE} - U_{пор}}{R_1}, & якщо\, U_{BE} > U_{пор} \end{cases} \tag{3}$$

$$I_K = \beta I_B, \tag{4}$$

де $U_{пор}$ – порогова напруга p-n – переходу, R_1 – опір емітерного переходу, β – коефіцієнт підсилення транзистора по струму.

Позначимо $x = \dfrac{U_{C1}}{U_{BE}}$, $y = \dfrac{I_L\sqrt{\dfrac{L}{C_1}}}{U_{BE}}$, $z = \dfrac{U_{C2}}{U_{BE}}$, $c = \dfrac{U_K}{U_{BE}}$, $e = \dfrac{\varphi_B}{U_{BE}}$ (φ_B- потенціал бази транзистора), $b = \dfrac{R_E}{\sqrt{\dfrac{L}{C_1}}}$, $m = \dfrac{R_L}{\sqrt{\dfrac{L}{C_1}}}$, запишемо рівняння генератора Колпітца (2) у вигляді, зручному для чисельного інтегрування:

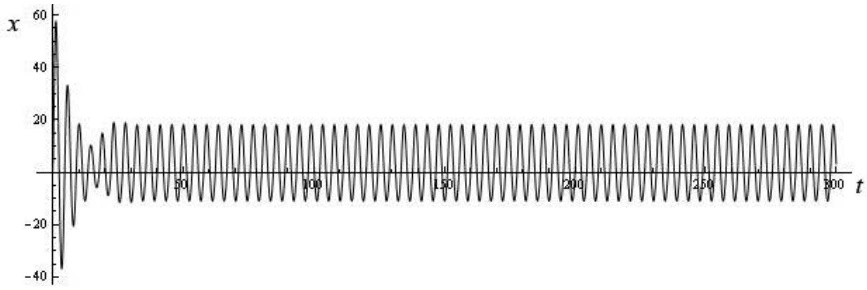
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - \beta F(z) \\ \dfrac{dy}{dt} = c - x - by - z \\ \dfrac{dz}{dt} = y - mz \end{cases} \tag{5}$$

$$F(z) = \begin{cases} e - z - 1, z \le e - 1 \\ 0, z > e - 1 \end{cases} \tag{6}$$

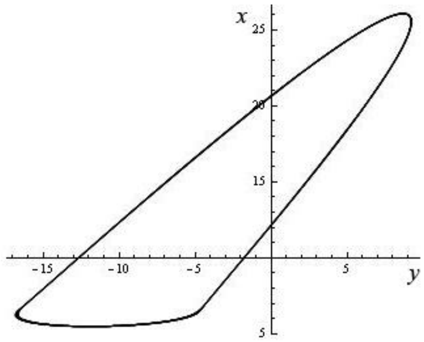
При цьому параметр *b* характеризує співвідношення активного і реактивного опорів, і, відповідно, режим роботи генератора. Для вибраних номіналів L=1 мкГн, R_L=95 Ом, R_E=2,4 кОм, C_1= C_2=70 пФ, U_K=20 В, U_E=-20 В і транзистора BSW63: *β=30, b=0,78, c=15, m=0,18, e=7,5*. Поставленою задачею будемо вважати ідентифікацію параметра *b.*

Моделювання динаміки системи

Моделювання системи (5) було проведено в програмному комплексі Wolfram Mathematica 7.0 з врахуванням вибраних параметрів. На рис. 2 представлені реалізації процесу *x(t)* та фазовий портрет при регулярному режимі роботи генератора Колпітца.



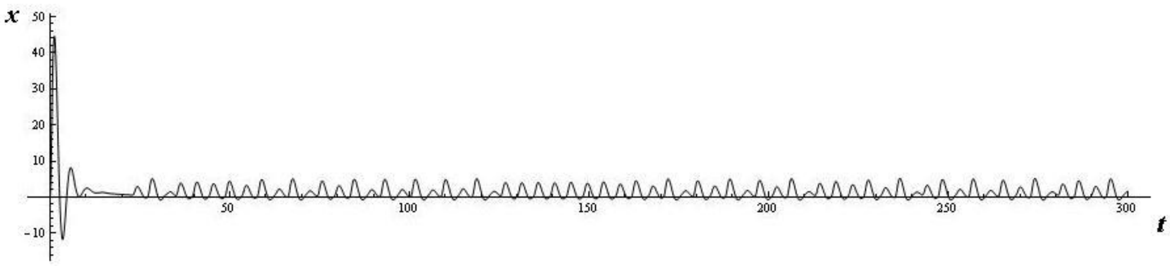
а



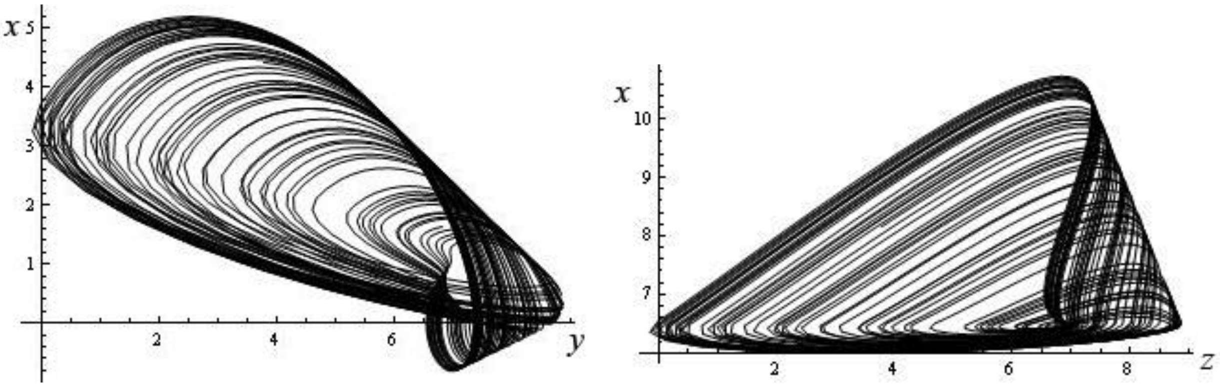
б

Рис. 2. Регулярний режим коливань генератора Колпітца

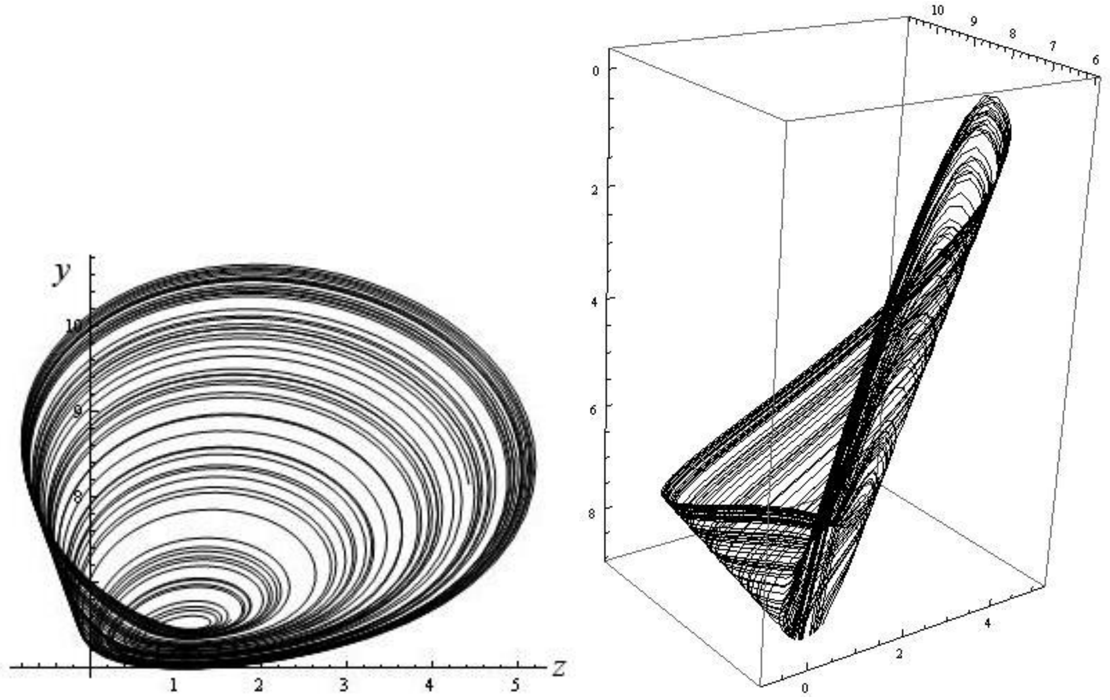
Зміна параметру *b* приводить до зміни динаміки системи, від стаціонарного стану до генерації синусоїдального сигналу і далі до хаотичного режиму. На рис. 3 представлені реалізація процесу *x(t)* та фазові портрети при хаотичному режимі роботи генератора Колпітца.



а



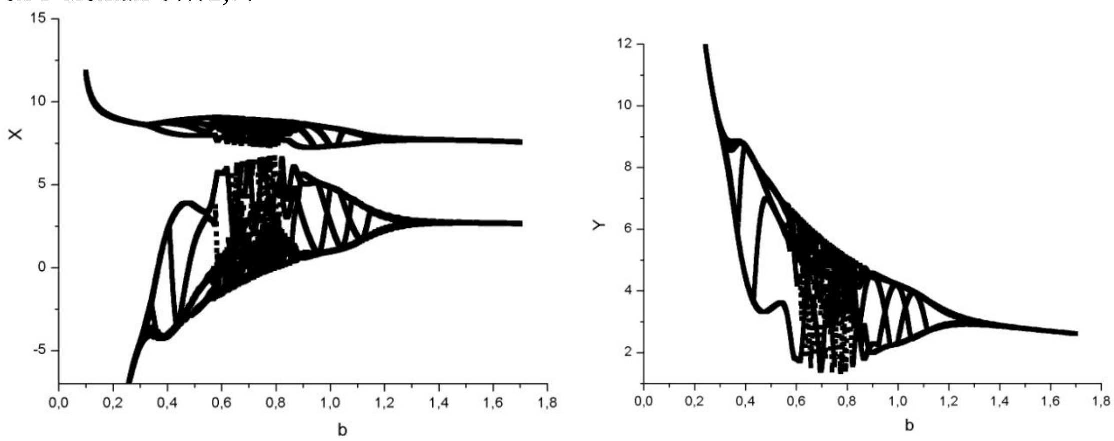
б *в*



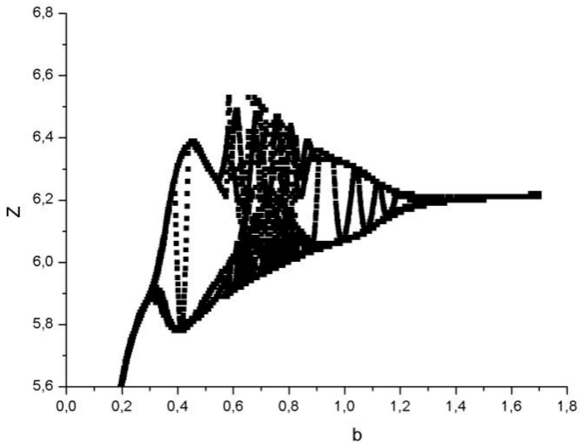
г *д*

Рис. 3. Хаотичний режим роботи генератора Колпітца: *а* – реалізація процесу *x(t); б,в,г* – фазові портрети коливань на площинах *x-y*, *x-z*, *y-z*; *д* – 3D-зображення фазового портрету

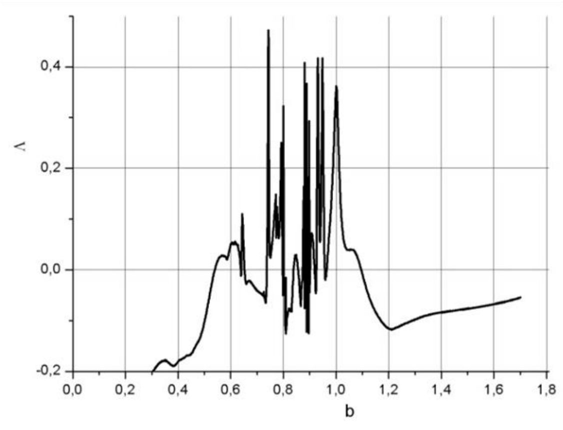
При побудові біфуркаційних діаграм, приведених на рис. 4, в якості біфуркаційного параметру використовувався множник b в системі рівнянь (5). Значення параметру b змінюється в межах 0…1,7.



а *б*



в



г

Рис. 4. Біфуркаційні діаграми та показник Ляпунова генератора Колпітца

Із діаграм слідує, що хаотичні режими виникають при b = 0,54÷1,09. Таким чином, ключовою інформацією генератора хаотичних коливань при передачі інформації є керуючий параметр b та початкові умови x_0, y_0, z_0.

Особливістю хаотичних коливань є їх висока чутливість до малих змін початкових умов. Тому одним з найбільш надійних способів детектування хаосу є визначення швидкості розбігання траєкторій, яка оціюється з допомогою показника Ляпунова [4]. Для n – вимірної динамічної системи, що описується диференційними рівняннями, існує n показників Ляпунова, які визначаються формулою (7):

$$\Lambda_i = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \| x'(T) \| \quad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

Знаки показників Ляпунова повністю характеризують тип коливань динамічної системи. Додатний знак показника Ляпунова є критерієм хаотичності динамічної системи.

Для більшості динамічних систем розрахунок показника Ляпунова можливий тільки чисельно. В нашому випадку розглядаються дві траєкторії, віддалені одна від одної на малу відстань l_0, яка через проміжок часу δt досягає значення l_1. Максимальний показник Ляпунова на кожному кроці визначається по формулі (8)

$$\Lambda_{max} = \ln \frac{|l_1 / l_0|}{\delta t}. \tag{8}$$

При збільшенні часу обчислень, розрахункове значення показника Ляпунова наближається до реального. Для реалізації описаного алгоритму використовувалося програмне середовище Wolfram Mathematica 7.0. Залежність показника Ляпунова від зміни керуючого параметру b представлена на рис. 3, *г*. Із графіка слідує, що показник Ляпунова приймає додатні значення при b = 0,54÷1,09, що повністю підтверджує дані, отримані з біфуркаційних діаграм.

Висновки

В роботі проаналізовані хаотичні режими високочастотного генератора Колпітца. Моделювання процесів показало як просту коливальну, так і складно-періодичну і хаотичну динаміку. Як слідує з біфуркаційних діаграм, хаотичні режими виникають при зміні керуючого параметру в межах b = 0,54…1,09 і показник Ляпунова у вказаному діапазоні приймає додатні значення.

Генератори хаотичної динаміки можуть застосовуватися не тільки як самостійна одиниця для захисту інформації, а також у складі різноманітних комплексів, зокрема, у протоколах квантової передачі ключа.

Література

1. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.В., Стрелкова Г.И. Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований.– 2003.- 544 с.

2. Михалёв А.И., Гуда А.И. Выбор критерия при адаптивно-поисковой идентификации динамической системы Ван-Дер-Поля / А.И. Михалёв, А.И. Гуда // Адаптивные системы автоматического управления. - 2010. - № 16(36). - С. 154-160.

3. Kennedy MP. Chaos in Colpitts oscillator. / Kennedy ME IEEE Trans Circuits Syst 1 1994; 44:771-4.

4. Schaumloffel K.-U. Multiplicative ergodic theorems in infinite dimensions // Lyapunov Exponents. Springer Berlin / Heidelberg, 1991. T. 1486/1991. Lecture Notes in Mathematics. C. 187.

Надійшла 31.10.2014 р. Рецензент: д.т.н., проф. Кравченко Ю. В.