УДК 621.396.662.072.078

Чумак О.І., к.т.н. *(Воєнно-дипломатична академія Міноборони України)*
Бойко І.А., Зінченко О.В., Срочинська Г.С. *(Державний університет телекомунікацій)*

АНАЛІЗ МЕТОДІВ СИНТЕЗУ ІНВАРІАНТНИХ ДО АДИТИВНОЇ ЗАВАДИ СИСТЕМ З ПОСТІЙНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Чумак О.І., Бойко І.А., Зінченко О.В., Срочинська Г.С. Аналіз методів синтезу інваріантних до адитивної завади систем з постійними параметрами. Розглянуто застосування основних методів, які лежать в основі синтезу інваріантних до адитивної завади систем з постійними параметрами.

Ключові слова: передача інформації, система управління, метод, синтез, параметри каналів зв'язку, інваріантность, адитивна завада

Чумак А.И., Бойко И.А, Зинченко О.В., Срочинская А.С. Анализ методов синтеза инвариантных к аддитивной помехе систем с постоянными параметрами. Рассмотрено применение основных методов, которые лежат в основе синтеза инвариантных к аддитивной помехе систем с постоянными параметрами.

Ключевые слова: передача информации, система управления, метод, синтез, параметры каналов связи, инвариантность, аддитивная помеха

Chumak O.I., Boiko I.A., Zinchenko O.V., Srochynska H.S. Analysis of methods of synthesis of the invariant to the additiviti hindrance systems with permanent parameters. Application of basic methods, that are the basis of synthesis of the invariant to the additiviti hindrance systems with permanent parameters, is considered.

Keywords: data transmission, system managements, method, synthesis, communication channel's parameters, invariant, additivity

Проблема побудови інваріантної системи зв'язку виникає кожного разу, коли передача інформації здійснюється по каналах зі змінними параметрами чи з нестаціонарними завадами.

Засобами досягнення інваріантості до завад і випадкових змін параметрів каналів є:

– застосування спеціальних методів модуляції і демодуляції сигналу (системи з постійними параметрами);

– зміна алгоритму демодуляції сигналу відповідно до зміни характеристик завади (системи з адаптивним приймачем);

– погоджена зміна алгоритмів перетворення сигналу на передавальній і прийомній сторонах відповідно до змін характеристик завади (адаптивні системи).

Можливість досягнення абсолютної чи відносної інваріантості та доцільність застосування з цією метою одного з перерахованих методів залежать від багатьох факторів і, у першу чергу, від характеристик завади й ступеня їх апріорної визначеності; допустимості організації зворотного каналу зв'язку як з експлуатаційної точки зору, так і з погляду затримки в передачі інформації; тривалості сеансу зв'язку і вимог до часу входження в зв'язок і т.д.

В статті розглянуто застосування основних методів, які лежать в основі синтезу систем з постійними параметрами, інваріантних до адитивної завади Ξ.

Перший метод синтезу – *знаходження інваріантного оператора*, полягає в наступному. Спочатку безвідносно до корисного сигналу знаходиться лінійне перетворення (оператор), який позначимо через $\Phi_{in\,\mathrm{var}\,\xi}$, що задовольняє умові абсолютної інваріантості, тобто такої, щоб при всіх $\xi \in \Xi$:

$$\Phi_{in\,\mathrm{var}\,\xi}(\xi) \equiv 0. \qquad \textbf{(1)}$$

В (1) ξ – квазідетермінована завада, яку можна записати у вигляді детермінованої функції часу з випадковими параметрами α, β, γ і т.д.: $\xi = \xi(t, \alpha, \beta, \gamma, ...)$.

Потім вибираємо сигнал S^* такий , що

$$\Phi_{in\,var\,\xi}(S^*) \neq 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Очевидно, що отримані $\Phi_{in\,var\,\xi}$ і S^* є рішеннями задачі синтезу, абсолютно інваріантної до завади Ξ.

Проілюструємо метод знаходження інваріантного оператора наступним прикладом.

Нехай завада ξ належить множині Ξ поліномів $n-1$-го ступеня з випадковими коефіцієнтами $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$:

$$\xi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_{n-1} t^{n-1}. \qquad \textbf{(3)}$$

Очевидно, інваріантним до даної множини Ξ є лінійний оператор *n*-кратного диференціювання, а саме:

$$\Phi_{in\,var\,\xi}\left[x(t)\right] = \frac{d^n\left[x(t)\right]}{dt^n}. \qquad \textbf{(4)}$$

Дійсно, при будь-яких $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, $\Phi_{in\,var\,\xi}\left[\xi(t)\right] \equiv 0$, що відповідає умові (1). Тепер в якості корисного сигналу виберемо наступну функцію часу:

$$S^*(t) = a_n t^n, \qquad \textbf{(5)}$$

яка задовольняє умові (2), оскільки:

$$\frac{d^n\left[S^*(t)\right]}{dt^n} = a_n n! \qquad \textbf{(6)}$$

Отримані алгоритм (4) і сигнал (5) цілком визначають абсолютно інваріантну до завади (3) систему [1].

Проаналізуємо метод ***модуляції сигналу***. Оскільки він має лише один параметр a_n, то інформація, очевидно, може бути закладена у величині чи знаку цього параметра. Хоча система, зумовлена виразами (4) і (5), абсолютно інваріантна, вона не є оптимальною в присутності завади *N*. Для знаходження оптимальної абсолютної інваріантної до завади Ξ системи з оператором демодуляції $\Phi_{in\,var\,\xi}$ варто знайти сигнал, максимізуючий корисний ефект на виході демодулятора. Якщо цей ефект не залежить від часу, як у випадку (6), то задача зводиться до максимізації функціоналу

$$\max_{S(t)}\left\{\frac{d^n\left[S(t)\right]}{dt^n}\right\}.$$

Розглянутий метод синтезу, привабливий простотою, має в той же час значні недоліки.

По-перше, отриманий оператор демодуляції, абсолютно інваріантний до завади Ξ, може бути дуже далеким від оптимальності стосовно завади *N*, наприклад, до білого гауссівського шуму. Тому синтезована таким чином система, будучи абсолютно інваріантною до завади Ξ, може мати порівняно низьку завадостійкість, тобто може не задовольняти лівій частині визначаючої нерівності (4). Цей недолік несуттєвий , якщо завада *N* мала або відсутня.

По-друге, не завжди вдається підібрати сигнал S^*, який задовольняє умові (2) ,тобто це функціональне рівняння може не мати рішення, якщо врахувати умови фізичної реалізованості системи. Наприклад, сигнал, отриманий у результаті рівняння (2), може містити частотні складові, що знаходяться поза смугою пропускання каналом зв'язку.

Нарешті, по-третє, – і це, мабуть, найбільший недолік методу – може не існувати перетворення в класі лінійних операторів, що задовольняють умові (1). Тому якщо оператор $\Phi_{in\,\mathrm{var}\,\xi}$ нелінійний, то після знаходження сигналу S^*, який задовольняє (1), необхідно знайти шляхом безпосереднього розрахунку результат спільного впливу сигналу і завади Ξ на нелінійну систему і перевірити виконання загальних умов абсолютної чи відносної інваріантості. Доцільно також розрахувати завадостійкість отриманої системи при спільній дії сигналу S^* та завад Ξ і N і переконатися у виконанні вимоги (4). Такі розрахунки дуже складні. Найбільший інтерес використання нелінійних операторів є в системах з пасивною паузою (системах виявлення сигналу). У цьому випадку, за відсутності завади N та сигналу, відповідна система виявляється абсолютно інваріантною до завади Ξ, а вплив нелінійності проявляється тільки при надходженні сигналу.

Таким чином, синтез інваріантних систем, що базується на методі знаходження інваріантного оператора, володіє рядом істотних недоліків. Однак у деяких випадках він може дати результати. Даний напрямок створення інваріантних систем застосовується там, де на основі загальних ідей використання структурних властивостей сигналів знайдено конкретні алгоритми та запропоновані схеми фільтрів (як правило, нелінійних), а також аналіз впливу на них сигналів і завад.

Проведемо аналіз методу синтезу інваріантної до адитивної завади Ξ системи з постійними параметрами *знаходження оптимального сигналу.*

Відповідно до цього методу оператор демодуляції вибирається безвідносно до завади Ξ як оптимальний за критерієм імовірності помилки алгоритм обробки довільного сигналу S у присутності адитивного шуму N. Позначимо цей оператор через $\Phi_{\text{опт}\,N}$, підкресливши цим, що він є оптимальним стосовно завади N. Такий вибір оператора демодуляції виправданий тим, що в цьому випадку абсолютно інваріантна до завади система (якщо її вдасться отримати) буде ідеальною інваріантною системою, а відносно інваріантна система буде наближатися до ідеальної. Тим самим усувається недолік методу знаходження інваріантного алгоритму – погіршення завадостійкості при дії завади N. Тобто

$$\Phi_{\text{опт}\,N}(\xi) = 0, \qquad (\xi \in \Xi); \tag{7}$$

$$\max_{\xi\in\Xi} |c| = \min_{S}; \tag{8}$$

$$\int\limits_{\Omega} \left[\Phi_{\text{опт}\,N}(\xi) \right]^2 d\omega = \min_{S}. \tag{9}$$

Оскільки оператор приймача у формулах (7)...(9) заданий, синтез інваріантної системи за цими рівняннями зводиться до синтезу сигналу S, який входить у відомий оператор $\Phi_{\text{опт}\,N}$.

Відзначимо відмінності даного методу *пошуку оптимального сигналу* від розглянутого вище методу *пошуку інваріантного оператора.* За першим методом оператор демодуляції Φ знаходиться з умови забезпечення абсолютної інваріантості стосовно завади Ξ, а сигнал S – з умови забезпечення найбільшої завадостійкості при заданому операторі Φ та заваді N. В другому методі оператор Φ знаходиться з умови забезпечення найбільшої завадостійкості стосовно завади N, а сигнал S – з умови забезпечення інваріантості (хоча б відносної) стосовно завади Ξ.

В другому методі оператор Φ знаходиться звичайними методами статистичної теорії оптимального прийому сигналів, і своєрідність розв'язуваної задачі викликана винятково з пошуками оптимального сигналу S. Наприклад, якщо N – гауссівський білий шум, то оптимальним оператором демодуляції є алгоритм когерентного прийому, при якому обчислюється згортка прийнятого сигналу $x(t)$ і варіанту переданого сигналу: $\Phi_{\text{опт}\,N}(x)=\int_0^T x(t)S(t)dt$. Тоді рівняння (7) і (8) абсолютної й оптимальної відносної інваріантості приймуть вигляд:

$$\int_0^T \xi(t)S(t)dt=0, \quad (\xi\in\Xi); \tag{10}$$

$$\max_{\xi(t)}\left|\int_0^T \xi(t)S(t)dt\right|=\min_{S(t)}. \tag{11}$$

Зазвичай на сигнал накладаються певні обмеження по смузі займаних частот і енергії. Частотні обмеження дозволяють з більшою чи меншою точністю представити сигнал як вектор кінцево вимірного гільбертового простору

$$S(t)=\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i\varphi_i(t),$$

де $\varphi_i(t)$ – система ортонормованих функцій.

Обмеження за енергією можна представити як належність коефіцієнтів a_i множині A такому, що

$$\int_0^T S^2(t)dt=\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i^2=Q.$$

Оскільки сигнал і завада належать до одного й того ж простору функцій, обумовленого характеристиками каналу зв'язку, представимо заваду так само, як і сигнал, у виді розкладу за системою ортонормованих функцій $\{\varphi_i\}$:

$$\xi(t)=\sum_{i=n_1}^{n_2} b_i\phi_i(t).$$

Коефіцієнт b_i є випадковою величиною і належить множині випадкових величин B, яка визначається завадою Ξ. Тоді рівняння (10) і (11) приймуть вигляд:

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i b_i=0, \quad (b_i\in B); \tag{12}$$

$$\max_{b_i\in B}\left|\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i b_i\right|=\min_{a_i\in A}. \tag{13}$$

Умови, за яких ці рівняння мають рішення, задовольняють інваріантості відповідних систем стосовно завади Ξ. Підкреслимо, що метод знаходження оптимального сигналу далеко не завжди приводить до задовільного, з точки зору інваріантості, результату. За своєю суттю можливість побудови відносно інваріантної системи за цим методом визначається результатом розв’язку екстремальної задачі загального виду (8) чи (9). Якщо існує сигнал, при якому

$$\min_S \max_{\xi\in\Xi}\left|\Phi_{\text{опт}\,N}(\xi)\right|\le\gamma(\varepsilon), \tag{14}$$

де $\gamma(\varepsilon)$ – припустима зміна вихідного сигналу демодулятора в інваріантній до ε системі, то задача побудови оптимальної відносно інваріантної системи може вважатися вирішеною.

Якщо ж нерівність (14) не виконується, то при використанні даного оператора демодуляції $\Phi_{\text{опт}\,N}$ інваріантну до ε завади Ξ систему побудувати не можна.

Основне практичне значення другий метод синтезу має при побудові широкосмугових систем зі складеними сигналами, в яких саме завдяки вибору відповідної форми сигналу вдається подавити зосереджену за спектром заваду та інші види завад [1].

Розглянемо третій спосіб синтезу інваріантних систем з постійними параметрами – *метод знаходження оптимального алгоритму.*

Відповідно до цього методу оператор демодуляції знаходиться за допомогою методів статистичного синтезу як оптимальний за критерієм мінімуму ймовірності помилки стосовно суміші завад N і Ξ при довільному сигналі $S(t)$. Якщо при отриманому фіксованому операторі демодуляції, який позначимо $\Phi_{\text{опт}\,N\Xi}$, імовірність помилки p залежить від форми сигналу, то варто вирішити варіаційну задачу, яка полягає в мінімізації функціоналу, що пов'язує ймовірність помилки з параметрами сигналу при заданому алгоритмі демодуляції:

$$p\left\lfloor S(t);\ \Phi_{\text{опт}\,N\Xi}\right\rfloor = \min_{S(t)}.$$

На перший погляд цей метод, типовий для синтезу оптимальних приймачів, не має відношення до інваріантних систем зв'язку. Однак, хоча при його використанні не ставиться завдання досягнення інваріантості, в ряді ситуацій отриманий оптимальний алгоритм $\Phi_{\text{опт}\,N\Xi}$ при визначених сигналах має властивість інваріантості стосовно завади Ξ. При цьому досягається і найменша ймовірність помилки, оскільки оператор $\Phi_{\text{опт}\,N\Xi}$ отриманий з умови мінімізації останньої. У цьому і полягає привабливість даного методу.

Зокрема, алгоритми оптимального прийому сигналів на фоні флуктуаційної завади N і зосередженої за спектром завади Ξ з відомою середньою частотою. Принцип роботи оптимального приймача полягає в компенсації зосередженої завади шляхом вирахування її оцінки з прийнятої суміші сигналу з завадами. Можливо практично повна компенсація зосередженої завади, тобто досягнення абсолютної інваріантості системи стосовно Ξ.

Можливість поєднання третього і другого методів синтезу інваріантних систем зв'язку. Якщо оптимальний алгоритм обробки довільного сигналу $S(t)$ при наявності завад N і Ξ відомий, то надалі можна відшукати оптимальний сигнал з умов абсолютної чи відносної інваріантості (7)...(9), замінивши в них оператор $\Phi_{\text{опт}\,N}$ оператором $\Phi_{\text{опт}\,N\Xi}$. Така процедура можлива, якщо алгоритм прийому і сигнал можуть бути обрані незалежно.

Слід зазначити, що проаналізований в загальних рисах метод синтезу, оснований на знаходженні оптимального алгоритму, має ряд недоліків. По-перше, не завжди вдається знайти $\Phi_{\text{опт}N\Xi}$, оскільки для цього необхідні відомості про заваду. Якщо при використанні перших двох методом синтезу, як правило, досить знати форму завади, то при використанні третього необхідні дані про статистичні характеристики параметрів завади. По-друге, алгоритм оптимальної обробки сигналу на фоні обох завад N і Ξ, як правило, складний з точки зору реалізації, а в ряді випадків практично нереалізовуваний.

Умови інваріантості систем з постійними параметрами до адитивної завади. При розгляді методу знаходження оптимального сигналу умова абсолютної інваріантості (12) повинна виконуватися при всіх можливих сукупностях коефіцієнту b_i. У відносно інваріантній системі рівність (12) повинна виконуватися наближено, а умовою відносної інваріантості може служити нерівність

$$\left|\sum_{i=n_1}^{n_2} a_i b_i\right| << \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i^2. \qquad \mathbf{(15)}$$

Співвідношення (12) і (15) дають підставу для деяких висновків про те, для яких завад можна побудувати інваріантну систему з постійними параметрами. Відзначимо два тривіальних випадки, при яких досягається абсолютна чи відносна інваріантість [2].

У першому з них підпростори сигналу і завад не перетинаються: у сигналі завжди відсутні координати (тобто відповідні коефіцієнти завжди дорівнюють нулю), що є присутніми в заваді, і навпаки. У цьому випадку будь-яка реалізація завади, очевидно, ортогональна до сигналу; виконується умова (12) і, отже, система є ідеально інваріантною. Практично це відповідає повному розподілу сигналу і завади за допомогою частотних фільтрів чи кореляторів. Цей випадок не представляє практичного інтересу, тому будемо вважать, що підпростори сигналу і завади, хоча б частково, перекриваються.

Другий тривіальний випадок, при якому може бути досягнута відносна інваріантість, спостерігається тоді, коли енергія завади обмежена, і набагато менша від енергії сигналу:

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} b_i^2 << \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i^2 = Q.$$

Тоді, очевидно, виконується умова (15) відносної інваріантості (хоча і не обов'язково оптимальної). Щоб не розглядати і цей тривіальний випадок, будемо вважати, що енергія реалізації завади порівнянна з енергією сигналу:

$$\sum_{i=n_1}^{n_2} b_i^2 \approx \sum_{i=n_1}^{n_2} a_i^2.$$

Далі з рівняння (12) випливає, що абсолютно інваріантну систему з постійними параметрами можна реалізувати тільки для такої завади, всі реалізації якої ортогональні сигналу. Це обмежує клас завад, у відношенні яких можлива абсолютна інваріантість, однак не виключає таку можливість, яка випливає з наступного загального твердження.

Досягнення абсолютної інваріантості в розглянутих системах з постійними параметрами можливо, коли коефіцієнти розкладу завади, є випадковими величинами, пов'язані один з одним детермінованими лінійними залежностями. Доказ цього твердження проведемо на простому прикладі, з якого буде зрозумілим хід доказу в загальному випадку.

Нехай коефіцієнти розкладу завади вдається розбити на пари $b_i \div b_j$, які, будучи корельованими випадковими величинами, пов'язані відомою і детермінованою лінійною залежністю виду:

$$b_i = k_{ij} b_j. \qquad \mathbf{(16)}$$

Тоді для виконання умови абсолютної інваріантості для кожної пари коефіцієнтів завади повинна виконуватися рівність:

$$a_i b_i + a_j b_j = a_i k_{ij} b_j + a_j b_j = 0, \qquad \mathbf{(17)}$$

звідки одержуємо $a_j = -k_{ij} a_i$. Звідси випливає, що якщо між коефіцієнтами b_i і b_j завади існує залежність виду (16), то можна вибрати детерміноване співвідношення між коефіцієнтами розкладу сигналу a_i і a_j так, щоб при будь-яких значеннях b_j виконувалась умова абсолютної інваріантості (17). Якщо підібрати відповідні співвідношення між усіма парами коефіцієнтів розкладання сигналу, то тим самим буде задоволено загальна умова абсолютної інваріантості (12).

Таким чином, для досягнення абсолютної інваріантості досить, щоб коефіцієнти розкладання завади були зв'язані один з одним детермінованими лінійними залежностями. Якщо відкинути вказаний вище тривіальний випадок, коли підпростори завади і сигналу не перетинаються, то дана умова є і необхідною умовою абсолютної інваріантості. Відзначимо, що відносна інваріантість вимагає виконання менш жорстких умов. Зокрема, у цьому випадку можна допустити існування визначеного числа попарно незалежних коефіцієнтів, однак в сукупності вони повинні задовольняти умові відносної інваріантості виду (15).

Висновки. Сформульована необхідна і достатня умова абсолютної інваріантості означає, що число незалежних змінних у розкладі реалізації завади повинна бути меншою, ніж розмірності простору завади.

Якщо завада не задовольняє умовам абсолютної інваріантості, то для забезпечення абсолютної інваріантості очевидно, необхідно, щоб її енергія була обмежена. При обмеженій (хоча і порівняною з енергією сигналу) енергії завади можна розраховувати на існування інваріантної до ε системи, якщо розмірність підпростору кожної конкретної реалізації завади набагато менша від розмірності сукупності реалізацій завади (а отже, і сигналу).

Математичні умови необхідності і достатності в даному випадку сформулювати важко, оскільки величина ε конкретно не визначена, і питання про те, чи вдасться побудувати інваріантну до ε систему, вимагає розв’язку конкретної задачі виду (13). Відзначимо, що сформульовані вище умови, яким повинна задовольняти адитивна завада, щоб для неї можна було побудувати абсолютно чи відносно інваріантну систему з постійними параметрами, можна узагальнити наступним чином.

Завада не може приймати довільну форму, вона повинна мати більш-менш визначену структуру, і лише обмежене число її параметрів може змінюватися довільно. Такого типу заваду прийнято називати квазідетермінованою.

Математичною моделлю квазідетерміної завади є квазідетермінований випадковий процес, реалізації якого описуються функціями заданого виду, що містять один або кілька випадкових параметрів. Практичними прикладами квазідетермінованих завад можуть слугувати вузькосмугова (зосереджена за спектром) завада, яку можна представити у вигляді гармонійного коливання з випадковими амплітудою, частотою і фазою, імпульсні завади і т.д.

Таким чином, можна стверджувати, що в класі систем з постійними алгоритмами можна досягти інваріантості тільки до квазідетермінованих завад.

Література

1. Стеклов В.К. Теорія електричного зв’язку : підручник / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман. – К.:Техніка, 2006. – 548 с.

2. Стеклов В.К. Оптимізація та моделювання пристроїв і систем зв’язку : підручник для ВНЗ / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман, Є.В. Кільчицький. – К.: Техніка, 2004. – 576 с.