

УДК 681.5.017 (045)

Петренко А.Б., к.т.н. (Національний авіаційний університет)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО НЕЛІНІЙНОГО СЛІДКУЮЧОГО ВИМІРЮВАЧА ЧАСТОТИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Петренко А.Б. Математична модель дискретного нелінійного слідкуючого вимірювача частоти другого порядку. В роботі складаються рівняння у кінцевих різницях відносно математичного сподівання та дисперсії сигналу похибки слідкуючих систем вимірювання частоти, що необхідно для проведення дослідження стохастичної динаміки та завадостійкості відповідних систем.

Ключові слова: СЛІДКУЮЧИЙ ВИМІРЮВАЧ, РІВНЯННЯ У КІНЦЕВИХ РІЗНИЦЯХ, ПОХИБКА ОЦІНЮВАННЯ, ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ

Петренко А.Б. Математическая модель дискретного нелинейного следящего измерителя частоты второго порядка. В работе составляются уравнения в конечных разностях относительно математической ожидания и дисперсии сигнала погрешности следящих систем измерения частоты, что необходимо для проведения исследования стохастической динамики и помехоустойчивости соответствующих систем.

Ключевые слова: СЛЕДЯЩИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬ, УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ, ОШИБКА ОЦЕНИВАНИЯ, ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ

Petrenko A.B. Mathematical model of the second order discrete nonlinear watching measuring instrument of frequency. In work there are equations in final differences rather mathematical expectations and dispersions of a signal of an error of watching systems of measurement of frequency that is necessary for carrying out research of stochastic dynamics and a noise stability of the relevant systems.

Keywords: WATCHING MEASURING INSTRUMENT, EQUATION IN FINAL DIFFERENCES, ERROR ESTIMATION, NOISE STABILITY

Вступ. Математичне моделювання радіотехнічних систем та пристроїв прогресивним та економічно вигідним способом їх дослідження та проектування. Дозволяє значно прискорити та автоматизувати процес розробки радіосистем, провести синтез та аналіз алгоритмів обробки сигналів, для реалізації яких необхідно використовувати цифрові обчислювальні пристрої. В основі проведення будь-якого математичного експерименту є створення математичної моделі пристрою, який розроблюється або тестується. При цьому, математична модель – це формальний опис об'єкта або явища за допомогою математичних рівнянь, які можуть бути представлені у вирішеній або невирішеній формі [1].

Огляд досліджень і публікацій. Слідкуючі вимірювачі частоти (СВЧ) мають призначення відслідковувати (оцінювати) з відповідною точністю поточної частоти сигналу, який приймається і має доплерівський зсув частоти, що, в свою чергу, пропорційний радіальній швидкості. Частота коливань, які виробляються СВЧ, відновлює порівняно повільні але закономірні зміни частоти вхідного сигналу, а випадкові флуктуації, які спричиняються шумами, підлягають фільтрації.

Таким чином, слідкуючий вимірювач частоти еквівалентний вузькополосному частотному фільтру, який повільно виконує перенастроювання відповідно до такту змін доплерівського зсуву частоти вхідного сигналу. Структура СВЧ визначається його особливостями, до яких необхідно віднести наступне.

1. СВЧ використовується одночасно для підтримки постійної частоти (і фази) сигналу в підсилювачі проміжної частоти (ППЧ) основного каналу прийому вимірювальної системи. Завдяки цьому постійній проміжній частоті, що особливо важливо при використанні сигналів складної форми, для яких важко створити перенастроюваний узгоджуваний фільтр. У зв'язку з цим частота коливання, що розробляється в СВЧ $f_r(t) = f(t) \pm f_0$, відрізняється від оцінки $f(t)$ поточної частоти вхідного сигналу на постійну величину f_0 , а перенастроювання приймача за частотою виконується гетеродинаванням сигналів, які приймаються. Частота напруги гетеродина f_g змінюється синхронно з частотою вхідного сигналу за допомогою схеми автонастроювання, що і забезпечує стабільність проміжної частоти f_0 . Зазначена особливість СВЧ знаходить відображення в його структурній схемі (рис.1). Використовується рознесений дискримінатор у вигляді перенастроеного змішувача (Зм) з

ППЧ та неперенастроеного розрізнявача (дискримінатора) (Р), який настроєний на постійне значення проміжної частоти f_0 .

У ППЧ з постійною частотою виконується основне підсилення і фільтрація сигналу (а також нормування за допомогою автоматичного регулювання підсилення (АРП), яка є загальною для всіх слідкуючих вимірювачів). Схема пошуку та захоплення (СПЗ) також входить до загального каналу прийому сигналу, вона виконує пошук за частотою шляхом перенастроювання синтезатора частоти (СЧ) через формувач оцінки (ФО) частоти вхідного сигналу. Для опису функціональної схеми СВЧ користуються реальними високочастотними сигналами – гармонічними коливаннями:

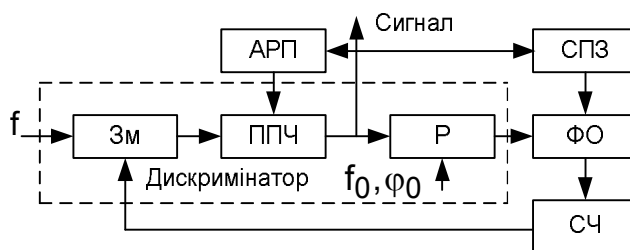


Рис. 1. Структурна схема СВЧ

$$u_c(t) = \cos \varphi_c(t); \quad u_r(t) = \cos \varphi_r(t), \quad (1)$$

де $\varphi_c(t) = 2\pi \int_0^t f(t') dt' + \varphi_{0c}$, $\varphi_a(t) = 2\pi \int_0^t f_a(t') dt' + \varphi_{0a}$ – поточні фази коливань на частоті вхідного сигналу $f(t)$ та гетеродину $f_a(t)$ відповідно. На виході змішувача при $f_a > f$ утворюються коливання сумарної та різницевої частот $u_c u_r = (k U_c U_r / 2) \times \{ \cos[\varphi_r(t) + \varphi_c(t)] + \cos[\varphi_r(t) - \varphi_c(t)] \}$, із яких в ППЧ отримуємо сигнал проміжної (різницевої) частоти:

$$u_p(t) = U_p \cos \varphi_p(t), \quad (2)$$

де $U_p = k U_c U_a / 2$ – амплітуда різницевого сигналу; $\varphi_p(t) = 2\pi \int_0^t f_p(t') dt' + \varphi_{0p}$ – поточна фаза; $f_p = f_a - f$ – різницева (проміжна) частота; $\varphi_{0p} = \varphi_{0a} - \varphi_{0c}$ – початкова фаза різницевого сигналу.

2. У СВЧ використовують два типи дискримінаторів: частотний та фазовий. На виході частотного або фазового дискримінатора в лінійному варіанті сигнал похибки пропорційний

відповідно:

$$u_{чд}, u_{фд} = \begin{cases} k(f_p - f_0), \\ k(\varphi_p - \varphi_0), \end{cases} \quad (3)$$

де f_0 – частота настроювання частотного дискримінатора;

φ_0 – фаза опорного сигналу фазового дискримінатора.

Як відомо [3], похибка у фазовому дискримінаторі є результатом зсуву фази, який виникає внаслідок різниці частот $f_p - f_0$, тобто пропорційно інтегралу від цієї різниці.

Внаслідок цього фазовий дискримінатор відносно параметра, що вимірюється, еквівалентний послідовному з'єднанню частотного дискримінатора та інтегратора. Найбільше поширення в СВЧ отримали амплітудно-частотні дискримінатори, які мають характеристику різницевого амплітудного дискримінатора загального виду:

$$K(f_p - f_0) = k_{чд} \frac{K_\phi [f_p - (f_0 + \Delta f_0 / 2)]}{K_\phi (f_p - f_0)} - \frac{K_\phi [f_p - (f_0 - \Delta f_0 / 2)]}{K_\phi (f_p - f_0)}, \quad (4)$$

де f_0 – перехідна частота частотного дискримінатора (ЧД);

Δf_0 – розбіжність за частотою в настроюванні двох резонансних фільтрів (рис.2).

Відповідно до формули (4) амплітудно-частотний дискримінатор має два резонансних фільтри, які симетрично рознесені на $\Delta f_0 / 2$ відносно перехідної частоти f_0 , на їх виходах розташовано детектори (Д) та суматор, один із входів якого є інвертованим. Стабілізацію коефіцієнта перетворення ЧД виконує АРП, величина Δf_0 вибирається такою,

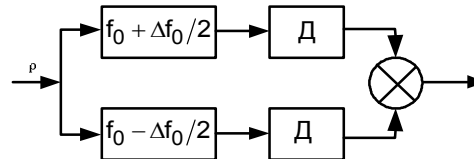


Рис. 2. Структурна схема

щоб амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) двох фільтрів мала перетин у точках перегину, де їх крутизна є максимальною. У подальшому дискримінаційну характеристику ЧД будемо апроксимувати виразом [2]:

$$k_{чд}(\varepsilon) = k_{чд} \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{b\varepsilon^2}{2}\right), \quad (5)$$

де $\varepsilon = f_p - f_0$ – похибка, яку фіксує ЧД;

$$k_{чд} = \left. \frac{dk_{чд}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad \text{– крутизна дискримінаційної характеристики ЧД.}$$

Відповідно до виразу (5) маємо, що:

$$\max_{\varepsilon} [k_{чд}(\varepsilon)] = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Якщо при цьому за половину ширини ϑ дискримінаційної характеристики прийняти таке значення похибки $\varepsilon = f_p - f_0$, що

$$\frac{k_{чд}(\vartheta)}{\max_{\varepsilon} [k_{чд}(\varepsilon)]} = 0,05, \quad (7)$$

то отримаємо наступний вираз:

$$\sqrt{b} = \frac{3}{\vartheta}. \quad (8)$$

Таким чином, вирази (6)...(8) та $k_{чд}$ є основними параметрами ЧД (абстрактного дискримінатора).

1. Розглянемо еквівалентну структурну схему нелінійної дискретної системи. Вважається [2], що в нелінійних дискретних системах можна виділити безінерційний нелінійний елемент (4) або (5), імпульсний елемент (ІЕ) та лінійну еквівалентну безперервну частину системи (ЛЕБЧ), яка на рис.1 відмічена як формувач оцінки (точніше – фільтр оцінювання). Сказаному відповідає структурна схема системи вимірювання (рис.3).

Як відомо [2, 3], в результаті дії завад напруга сигналу похибки ЧД є випадковою функцією за часом. При цьому залежність математичного сподівання вихідної напруги дискримінатора від похибки має назву дискримінаційної характеристики:

$$k_{чд}(\varepsilon) = M[u_{чд}(\varepsilon, u_{ш}(t), t)] \quad (9)$$

де $u_{ш}(t)$ вказує на залежність $u_{чд}$ від шуму (завад).

У першому наближенні можна вважати, що випадкова складова вихідної напруги дискримінатора при $\varepsilon = \text{const}$

$$u_{чд}^0(\varepsilon, u_{ш}, t) = u_{чд}(\varepsilon, u_{ш}, t) - k_{чд}(\varepsilon), \quad (10)$$

являє собою стаціонарний випадковий процес. Тоді кореляційна функція цієї складової буде дорівнювати $R_{чд}(t, \varepsilon) = M[u_{чд}^0(t + \tau, \varepsilon, u_{ш}) \cdot u_{чд}^0(t, \varepsilon, u_{ш})]$, відповідно, спектральна щільність:

$$S_{чд}(\omega, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{чд}(t, \varepsilon) e^{-j\omega t} dt.$$

Як видно, ці характеристики залежать від сигналу похибки. При широкосмуговій вхідній заваді спектральна щільність напруги дискримінатора буде в першому наближенні постійною в значному діапазоні частот [4]. Це дозволяє замінити випадкову складову вихідної напруги дискримінатора білим шумом з інтенсивністю $\sqrt{S_{чд}(0, \varepsilon)}$, тобто

$$u_{чд}^0(t, \varepsilon, u_{ш}) = \sqrt{S_{чд}(0, \varepsilon)} \cdot \xi(t), \quad (11)$$

де $\xi(t)$ – білий шум з одиничною спектральною щільністю.

Величина $k_{ф}(\varepsilon) = \sqrt{S_{чд}(0, \varepsilon)}$ має назву флукутаційної характеристики дискримінатора. Таким чином, напруга на виході ЧД записується:

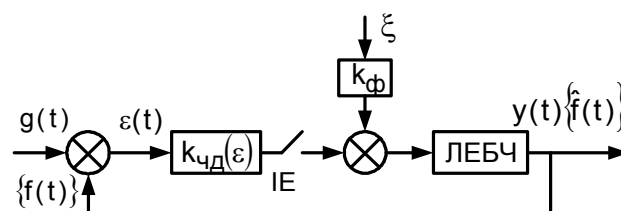


Рис.3. Структурна схема

$$u_{чд}(\varepsilon, u_{ш}, t) = k_{чд}(\varepsilon) + k_{ф}(\varepsilon) \cdot \xi(t). \quad (12)$$

Для проведення аналізу статистичної динаміки дискретної системи корисно провести статистичну лінеаризацію нелінійних елементів системи [5], що визначає:

$$u_{чд}(t) = m_{\varepsilon} k_0 + k_1 \varepsilon^0 + k_2 \xi(t), \quad (13)$$

де k_0, k_1, k_2 – коефіцієнти статистичної лінеаризації дискримінаційної та флуктуаційної характеристик, що визначаються:

$$k_0 = M\{k_{чд}(\varepsilon)\} \quad k_1 = M\{\varepsilon^0 k_{чд}(\varepsilon)\} \quad k_2 = M\{k_{ф}(\varepsilon)\} \quad (14)$$

де ε^0 – центрована випадкова складова сигналу похибки $\varepsilon^0 = f_p - f_0$;

m_{ε} – математичне сподівання ε ; θ_{ε} – дисперсія випадкової складової ε^0 .

Знаком $M[\dots] = \int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon) d\varepsilon$ позначена операція статистичного осереднення (операція математичного сподівання).

Виклад основного матеріалу. Розглянемо систему з ЛЕБЧ, коли фільтр оцінювання системи вимірювання частоти має другий порядок, тобто відповідає передавальній функції:

$$W_{ЛЕБЧ}(p) = \frac{k_w(1+pT_2)}{p^2} = \frac{k_w}{p^2} + \frac{k_w \cdot T_2}{p}. \quad (15)$$

У часовому просторі передавальній функції (15) відповідає імпульсна характеристика $k_{ЛЕБЧ}(t) = k_w \cdot t + k_w T_2 \cdot 1(t)$.

Введемо коефіцієнти пропорційності за координатою положення $\alpha = k_w T_2$ та змінною швидкості $\beta = k_w$.

Знайдемо z -перетворення (15) разом із фіксатором нульового порядку:

$$W(z) = (1-z^{-1}) Z \left\{ \frac{\beta}{p^3} + \frac{\alpha}{p^2} \right\} = (1-z^{-1}) \times \left[\frac{\beta T^2 z^{-1} (1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3} + \frac{\alpha T z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right] = \frac{b_1^* z^{-1} + b_2^* z^{-2}}{2(1-z^{-1})^2},$$

де $b_1^* = (2\alpha T + \beta T^2)/2$, $b_2^* = (\beta T^2 - 2\alpha T)/2$ – коефіцієнти полінома чисельника $W(z)$.

Відповідно до структурної схеми (рис. 3) та виразу (15) запишемо рівняння для дискретної системи другого порядку:

$$(b_1^* z^{-1} + b_2^* z^{-2}) Z\{u_{чд}(\varepsilon(nT), u_{ш}(nT), nT)\} = (1-z^{-1})^2 Z\{g(nT) - \varepsilon(nT)\}. \quad (16)$$

Переходимо до часового простору й отримуємо:

$$\Delta^2 \varepsilon_n = \Delta^2 g_n - b_1^* u_{чд,(n-1)} - b_2^* u_{чд,(n-2)}, \quad (17)$$

де $\Delta^2 \varepsilon_n = \Delta(\Delta \varepsilon_n) = \Delta(\varepsilon_n - \varepsilon_{(n-1)})$ – друга кінцева різниця від похибки оцінювання частоти вхідного сигналу.

Після виконання статистичної лінеаризації виразу для сигналу похибки на виході дискримінатора (13) отримуємо:

$$\Delta^2 \varepsilon_n = \Delta^2 g_n - b_1^* m_{\varepsilon,(n-1)} \cdot k_0 - b_1^* k_1 \cdot \varepsilon_{(n-1)}^0 - b_1^* k_2 \xi_{(n-1)} - b_2^* k_0 m_{\varepsilon,(n-2)} - b_2^* k_1 \cdot \varepsilon_{(n-2)}^0 - b_2^* k_2 \xi_{(n-2)}. \quad (18)$$

Виконаємо осереднення у виразі (18):

$$\Delta^2 m_{\varepsilon,n} = \Delta^2 g - b_1^* k_0 m_{\varepsilon,(n-1)} - b_2^* k_0 m_{\varepsilon,(n-2)}. \quad (19)$$

Тоді для центрованого випадкового процесу похибки маємо:

$$\Delta^2 \varepsilon_n^0 = -b_1^* k_1 \varepsilon_{(n-1)}^0 - b_1^* k_2 \xi_{(n-1)} - b_2^* k_1 \varepsilon_{(n-2)}^0 - b_2^* k_2 \xi_{(n-2)}. \quad (20)$$

На основі (20) виведемо рівняння для дисперсії сигналу похибки оцінювання. З цієї метою в (20) використаємо векторно-матричне зображення рівнянь першого порядку. При цьому використаємо метод «дискретної моделі», який має певну аналогію з методом «аналогового моделювання» [5, 6]. Рівняння моделі має вигляд:

$$Z\{\varepsilon_n\} = z^{-1} \left\{ \left[(2 - b_1^* k_1) Z\{\varepsilon_n\} - b_1^* k_2 Z\{\xi_{2,n}\} \right] + z^{-1} \left[- (1 + b_2^* k_1) Z\{\varepsilon_n\} - b_2^* k_2 Z\{\xi_{1,n}\} \right] \right\}. \quad (21)$$

Тоді структурна схема моделі матиме вигляд, як показано на рис. 4:

Відповідно до структури (рис. 4) записуємо рівняння у кінцевих різницях для координати $x_{1,n}$ (частоти прийнятого сигналу) та швидкості змін цієї координати $x_{2,n}$:

$$\begin{aligned} x_{1,(n+1)} &= x_{2,n} - (1 + b_2^* k_1) x_{1,n} - b_2^* k_2 \xi_{1,n}; \\ x_{1,(n+1)} &= (2 - b_1^* k_1) x_{1,n} - b_1^* k_2 \xi_{2,n}; \\ \varepsilon_n &= x_{1,n}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вводимо матриці та вектори:

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} -(1 + b_2^* k_1) & 1 \\ (2 - b_1^* k_1) & 0 \end{bmatrix}; & G &= \begin{bmatrix} -b_2^* k_2 \\ -b_1^* k_2 \end{bmatrix}; & H &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ X_n &= (x_{1,n} \quad x_{2,n})^T; & \xi_n &= (\xi_{1,n} \quad \xi_{2,n})^T; & J &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Тоді рівняння (22) можна зобразити у векторно-матричній формі, а саме:

$$\begin{aligned} X_{(n+1)} &= FX_n + G\xi_n; \\ \varepsilon_n &= HX_n. \end{aligned} \quad (24)$$

Відповідно до (24) запишемо рівняння для дисперсії координатного вектора системи:

$$\theta_{(n+1)} = M[X_{(n+1)} X_{(n+1)}^T] = FM[X_n X_n^T]F^T + GM[\xi_n \xi_n^T]G^T = F\theta_{x,n}F^T + G\theta_{\xi,n}G^T. \quad (25)$$

У (25) враховувалась відсутність залежності поміж шумами та координатами системи. У скалярному вигляді рівняння (25) можна отримати також на основі рівнянь (22). Позначимо:

$$\theta_{11,n} = M[x_{1,n}^2] \quad \theta_{22,n} = M[x_{2,n}^2] \quad \theta_{12,n} = \theta_{21,n} = M[x_{1,n}x_{2,n}] \quad (26)$$

Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \theta_{11,(n+1)} &= \theta_{22,n} + (1 + b_2^* k_1)^2 \theta_{11,n} - 2(1 + b_2^* k_1) \theta_{12,n} + (b_2^* k_2)^2 \theta_{\xi_{1,n}}; \\ \theta_{22,(n+1)} &= (2 - b_1^* k_1)^2 \theta_{11,n} + (b_1^* k_2)^2 \theta_{\xi_{2,n}}; \\ \theta_{12,(n+1)} &= (2 - b_1^* k_1) \theta_{12,n} - (1 + b_2^* k_1)(2 - b_1^* k_1) \theta_{11,n}. \end{aligned} \quad (27)$$

В останньому рівнянні (27) прийнято, що $M[\xi_{1,n}\xi_{2,n}] = 0$ [1].

Висновок. Таким чином, у роботі отримано математична модель нелінійної стохастичної систем вимірювання швидкості (доплеровської частоти) радіотехнічних пристроїв, які працюють в умовах нормальних шумів.

Література

1. Монаков А.А. Основы математического моделирования радиотехнических систем : учеб. пособие / А.А. Монаков. – СПб.: ГУАП, 2005. – 100 с.
2. Баранов О.А. Нелінійна стохастична динаміка фільтрів оцінювання: захоплення та розподіл сигналів / О.А. Баранов, І.П. Лісовий, С.О. Шматок. – К.: Радіоаматор, 2000. – 214 с.
3. Коростелев А.А. Пространственно-временная теория радиосистем : учеб. пособие для вузов / А.А. Коростелев. – М.: Радио и связь, 1987. – 320 с.
4. Шматок С.А., Лукьянов В.Ф. Вопросы теории взаимодействующих марковских систем / С.А. Шматок, В.Ф. Лукьянов. – Минск: «Высшая школа», 1979. – 142 с.
5. Кривуца В.Г. Моделирование динамических систем / В.Г. Кривуца, С.О. Шматок, В.Ш. Гостев. – К.: Видав. ООО «ДВ.К», 2004. – 233 с.
6. Сигалов Г.Г., Мадорский Л.С. Основы теории дискретных систем управления / Г.Г. Сигалов, Л.С. Мадорский ; под ред. Сигалова Г.Г. – Минск, «Высшая школа», 1973. – 189 с.