

УДК 004.73(042.4)

Пономаренко А.В., к.т.н.; Булаковская А.А., магистр; Харлай Л.А., магистр

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ АЛГОРИТМА ВЕЕРНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

**Ponomarenko A.V., Bulakovska A.O. Kharlay L.O. Comparative analysis of the weighting functions of the fan beam Radon transform algorithm.** The problem of rational choice weighting functions of discrete integral transforms in remote detection through defects in the pipe system. A weighting function on the basis of the module of the first derivative of the Gaussian function is proposed. Such choice ensures an optimal ratio between the degree of expansion of the impulse response of the system to the point source signal, and level and the shape of the side lobes of the response function. It is shown that that for development of the practically realized algorithms of tomography treatment it is necessary carefully to choose the weighting functions of two sized filtering. It is necessary properly to modify the traditional algorithms of computer tomography on the basis of windmill Radon transformation taking into account character of signals, hindrances and especially parameters of weighting functions.

**Keywords:** discrete integral transform, Radon transform, weighting function, remote detection through defects, Gaussian function, response function

**Пономаренко О.В., Булаковська А.О., Харлай Л.О. Порівняльний аналіз вагових функцій алгоритму віяльного перетворення Радона.** Розглянуто задачу раціонального вибору вагових функцій дискретних інтегральних перетворень в системах дистанційного виявлення наскрізних дефектів у трубопроводах. Запропоновано вагова функція на основі модуля першої похідної гаусівської функції. Показано, що при такому виборі забезпечується оптимальне співвідношення між ступенем розширення імпульсного відгуку системи на сигнал точкового джерела, рівнем і формою бічних пелюсток функції відгуку.

**Ключові слова:** дискретне інтегральне перетворення, перетворення Радона, вагова функція, дистанційне виявлення дефектів, гаусівська функція, функція відгуку

**Пономаренко А.В., Булаковская А.А., Харлай Л.А. Сравнительный анализ весовых функций алгоритма веерного преобразования Радона.** Рассмотрена задача рационального выбора весовых функций дискретных интегральных преобразований в системах дистанционного обнаружения сквозных дефектов в трубопроводах. Предложена весовая функция на основе модуля первой производной гауссовской функции. Показано, что при таком выборе обеспечивается оптимальное соотношение между степенью расширения импульсного отклика системы на сигнал точечного источника, уровнем и формой боковых лепестков функции отклика.

**Ключевые слова:** дискретное интегральное преобразование, преобразование Радона, весовая функция, дистанционное обнаружение дефектов, гауссовская функция, функция отклика

### Введение

При определении мест утечек жидкости из трубопроводов под давлением применяются методы дистанционного зондирования с комбинированным (линейным и угловым) сканированием датчиков акустических шумов. Для определения координат источника утечки чаще всего применяются корреляционные методы, однако для скрытых (подземных, подводных) трубопроводов точность метода будет довольно низкой.

Требуемой точности можно достичь путем применения методов реконструктивной вычислительной томографии, модифицированных для случая пространственно-разнесенных приемников [1]. При томографической обработке данных в области пространственных частот получаем совокупность точек пространственного спектра в полярном растре, т.е. в координатах  $\rho, \varphi$ .

Как известно, в основе математического аппарата томографии лежат прямое и обратное преобразования Радона [2]. В работах [3, 4] показано, что для конкретной рассматриваемой задачи наиболее приемлемым методом томографической обработки данных от разнесенных датчиков системы обнаружения утечек является метод интегрирования фильтрованных обратных проекций.

### 1. Постановка задачі

Рассмотрим последовательность этапов обработки по методу обратных проекций [5]. Одномерное преобразование Фурье пространственного спектра  $G(f_x, f_y)$  по одной из пространственных частот (например,  $f_x$ ) имеет вид

$$g(x_k, f_{yk}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[-j2\pi f_{yk} x_k] df_x. \quad (1)$$

Выполняя преобразование Фурье по другой координате пространственной частоты  $f_y$ , получаем функцию изображения

$$g(x_k, y_k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_k, f_{yk}) \exp[-j2\pi f_{yk} y_k] df_y. \quad (2)$$

Перейдем в выражениях (1 – 2) к полярным координатам в области пространственных частот:

$$g(x_k, y_k) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} G(\rho_k, \theta_k) |\rho| \exp[-j2\pi \rho \cos(\theta_k - \varphi_k)] d\rho, \quad (3)$$

где  $|\rho|$  – множитель перехода к полярным координатам (якобиан преобразования).

По существу, при переходе к полярным координатам в выражении (3) происходит переход от преобразования Фурье к преобразованию Радона.

Для замены прямой свертки быстрой сверткой [6] введем следующие обозначения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\rho_k, \theta_k) |\rho| \exp[-j2\pi r \cos(\theta_k - \varphi_k)] d\rho = \mathfrak{R}[G(\rho_k, \theta_k) |\rho|], \quad (4)$$

где  $\mathfrak{R} \cdot$  – символ преобразования Радона.

Из-за неравномерности расположения отсчетов на плоскости  $f_x, f_y$  алгоритмы вида (3,4) невозможно реализовать непосредственно, например, с помощью процессоров быстрого преобразования Фурье (БПФ). Внутренний интеграл выражения (3) необходимо представить как интеграл Фурье-Стилтьеса. Тогда выражение (2) для всего излучающего участка примет следующий вид:

$$g(x_k, y_k) = \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} G(\rho, \theta) |\rho| \exp[-j2\pi \rho r_k \cos(\theta_k - \varphi_k)] d\rho + \\ + \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \int_{\rho_{n\min}}^{\rho_{n\max}} G(\rho_n, \theta) |\rho_n| \exp[-j2\pi \rho_n r_k \cos(\theta_k - \varphi_k)] d\rho_n, \quad (5)$$

где  $\rho = \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$  – дискретные отсчеты функции  $|\rho|$ , которые в методе обратных проекций на основе свертки трактуются как ядро преобразования (3) в области пространственных частот [6];  $\rho_n = 2/\lambda_n$ ,  $\lambda_{n\min} \leq \lambda_n \leq \lambda_{n\max}$ .

Однако для приемника  $k$ -й позиции с полосой пропускания  $\Delta f = f_{\max} - f_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\min}} - \frac{c}{\lambda_{\max}}$

в выражении (5) пределы интегрирования во втором слагаемом  $\rho_{n\min}, \rho_{n\max}$  можно заменить на  $\rho_{\text{прм}\min}, \rho_{\text{прм}\max}$  соответственно:

$$\rho_{\text{прм}\min} = 2/\lambda_{\max} = 2f_{\min}/c, \quad \rho_{\text{прм}\max} = 2/\lambda_{\min} = 2f_{\max}/c.$$

Диаграмма размещения отсчетов пространственного спектра полезных сигналов (акустических шумов) и помех (шумов приемника и мешающих источников) изображена на рис. 1.

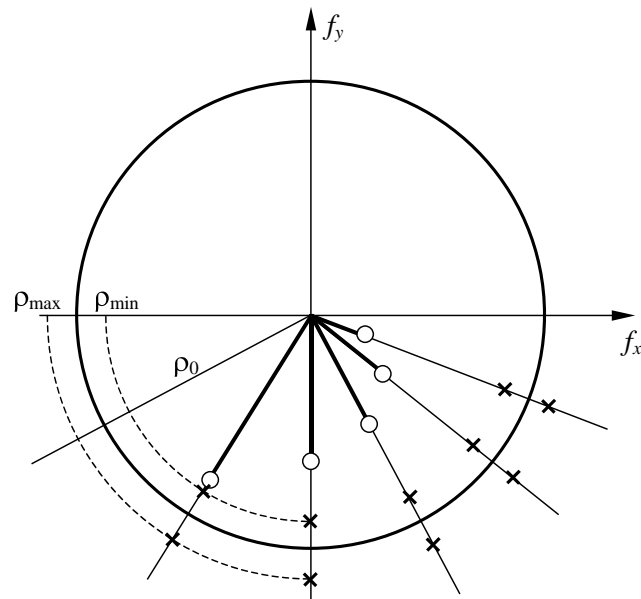


Рис. 1. Диаграмма размещения отсчетов пространственного спектра

По такому пространственному спектру точно восстановить функцию  $g(x, y)$  с использованием преобразований (5) невозможно, поскольку задача становится некорректной [1, 7]. Некорректность обусловлена наличием второго слагаемого в правой части выражения (4). Весовая функция или функция окна  $k(\rho)$  усиливает в преобразовании Радона влияние высоких частот шумов и помех, которые сами по себе являются широкополосными. Это приводит к потере устойчивости решения из-за малых отклонений исходных данных. Для построения устойчивых решений уравнения (4) необходимо модифицировать (регуляризовать) функцию окна:

$$k_c(\rho) = |k_p(\rho, \alpha)|, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации, обычно выбираемый с учетом ошибок задания исходных данных [1, 7]. В рассматриваемой задаче  $\alpha$  выбирается по энергетическим и спектральным характеристикам помех [1, 8].

## 2. Результаты сравнительного анализа весовых функций

По существу, регуляризаторы в задачах компьютерной томографии представляют собой сглаживающие весовые функции двумерного  $\rho$ -фильтра. На рис. 2 и 3 изображены сечения характеристики исходного  $\rho$ -фильтра в полярных координатах и отклика фильтра (двумерная характеристика в области пространственных частот) соответственно.

Из-за высокого уровня боковых лепестков пространственно-частотного отклика  $\rho$ -фильтра на изображении появляются артефакты, обусловленные пульсациями Гиббса и шумами мешающих источников. Поэтому в качестве регуляризаторов применяют сглаживающие функции [5, 9]:

$$k_p(\rho, \alpha) = \begin{cases} \exp(-\alpha|\rho|); \\ \exp(-\alpha^2 \rho^2 / 2); & \text{где } m = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{1 + \lambda \rho^{2m}}, \end{cases} \quad (7)$$

При  $\alpha \rightarrow 0$   $k_p(\rho, \alpha) \rightarrow 1$ .

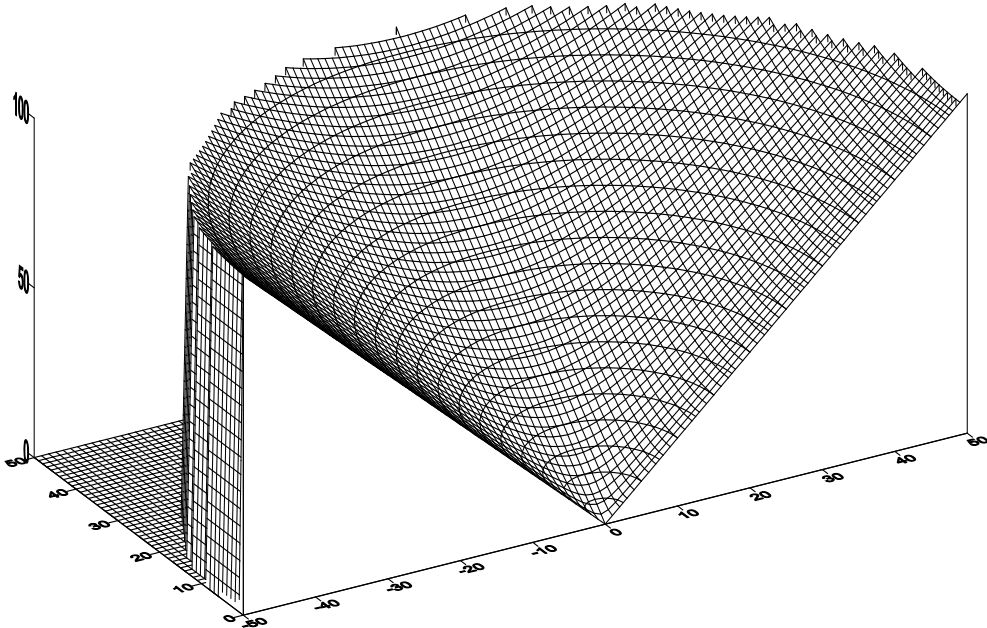


Рис. 2. Характеристика двумерного  $\rho$ -фільтра в полярних координатах

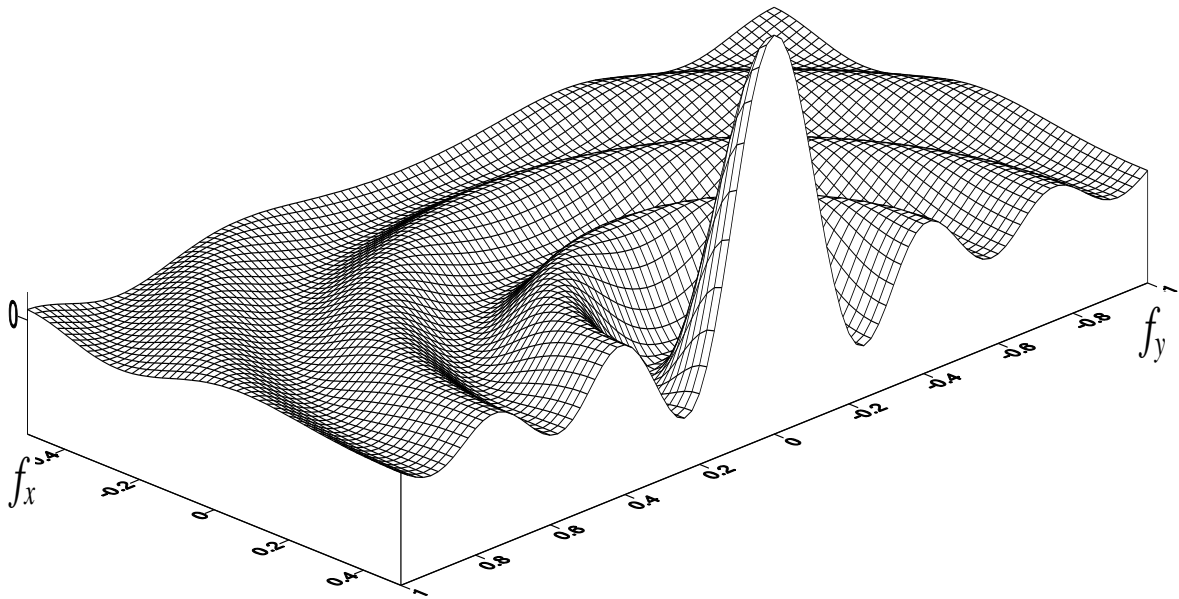


Рис. 3. Характеристика двумерного  $\rho$ -фільтра в області просторових частот

С другой стороны, сглаживание характеристики  $\rho$ -фильтра приводит к расширению функции отклика, следовательно, к ухудшению разрешающей способности системы. В работе [1] выполнен сравнительный анализ сглаживающих весовых функций (7), а также функций на основе полиномов Эрмита, инвариантных по отношению к повороту координатной плоскости (подобно функции  $\exp -\alpha^2 \rho^2 / 2$ ).

Класс сглаживающих весовых функций, инвариантных по отношению к повороту координатной плоскости, дается соотношением [5]:

$$f_w \rho = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{n!}} \exp -\pi \rho^2 H_n 2\rho\sqrt{\pi} , \quad (8)$$

где  $H_n x$  – полином Эрмита [5]  $n$ -го порядка вида

$$H_{en} x = -1^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Здесь индекс  $en$  означает ортогональный полином, связанный с экспоненциальной весовой функцией  $\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ;

$$\begin{aligned} H_0 x &= 1, \\ H_1 x &= x, \\ H_2 x &= x^2 - 1, \\ H_3 x &= x^3 - 3x, \\ H_4 x &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Эти функции обладают свойством самотрансформируемости в рамках произвольного ортогонального преобразования, т.е. они переходят сами в себя при преобразовании вида  $g t \rightarrow G f = -j^n g f$ , где  $t, f$  – ортогональные координаты.

Для весовых функций вида (8) функция двумерного ортогонального преобразования имеет вид:

$$\chi_{\rho, \varphi} = \exp\left[-\frac{\pi}{2} \rho^2 + \varphi^2\right] L_n\left[\pi \rho^2 + \varphi^2\right],$$

где  $L_n x$  – полином Лагерра [5]  $n$ -го порядка. Полиномы Лагерра определяются по следующим формулам:

$$L_n x = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}, \quad L_n x = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n-k} \frac{-x^{-k}}{k!}.$$

На рис. 4 и 5 представлены графики эрмитова сигнала для полинома Эрмита 26 порядка и соответствующей ему корреляционной функции, а на рис. 6 – сечение поверхности отклика точечного излучателя.

Видно, что для весовой функции на основе полинома Эрмита уровень боковых лепестков пространственно-частотного отклика также высок. Этот же недостаток присущ и функциям вида (8). Поэтому в работе [1] предложена сглаживающая весовая функция – модуль первой производной гауссовской функции  $g x = a \cdot \exp -bx^2$ , где  $a, b$  – константы, выбираемые в соответствии с размерами области интегрирования преобразования Радона.

Запишем выражение для модуля первой производной:

$$\left| \frac{d}{dx} \left[ a \cdot \exp -bx^2 \right] \right| = ab \cdot \left| 2x \cdot \exp -bx^2 \right|. \tag{9}$$

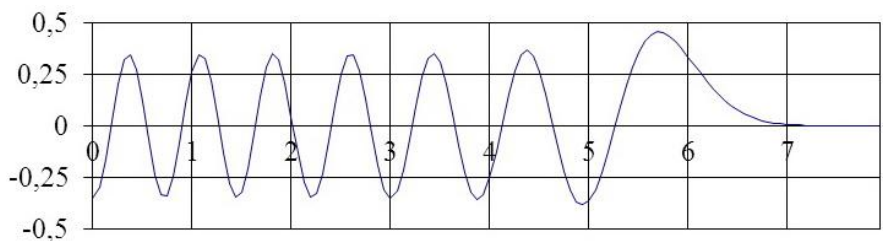


Рис. 4. График эрмитова сигнала для полинома Эрмита 26 порядка

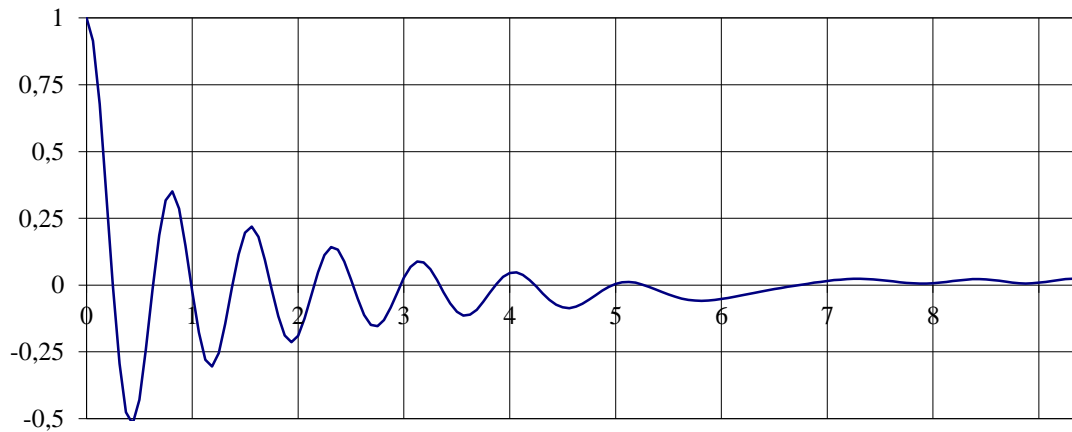


Рис. 5. Корреляционная функции полинома Эрмита 26 порядка

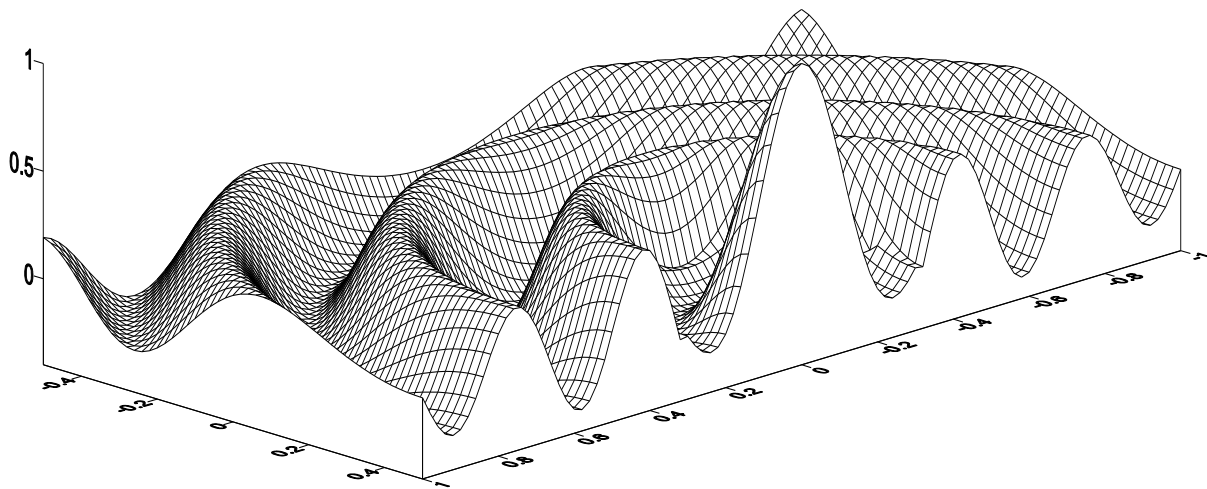


Рис. 6. Сечение поверхности отклика точечного излучателя для весовой функции на основе полинома Эрмита

На рис. 7 изображен график функции (9), а на рис. 8 – сечение двумерной сглаживающей функции на основе выражения (9). Подбирая значения констант  $a$ ,  $b$ , можно оптимизировать соотношение ширины пространственно-частотного спектра и уровень боковых лепестков. На рис. 9 изображено одномерное сечение пространственно-частотного спектра.

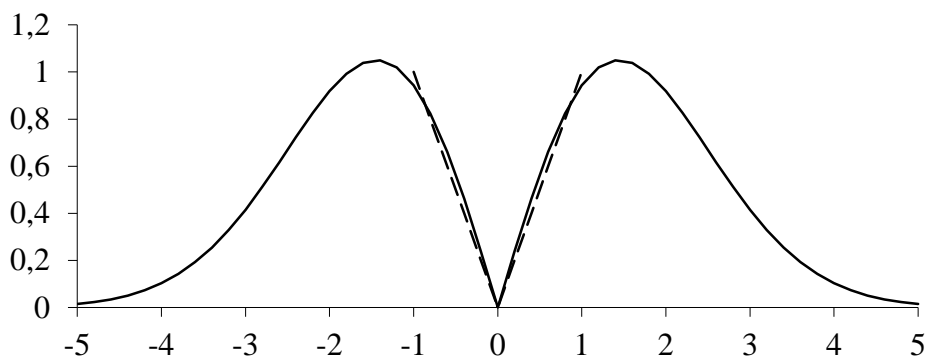


Рис. 7. График модуля первой производной гауссовской функции

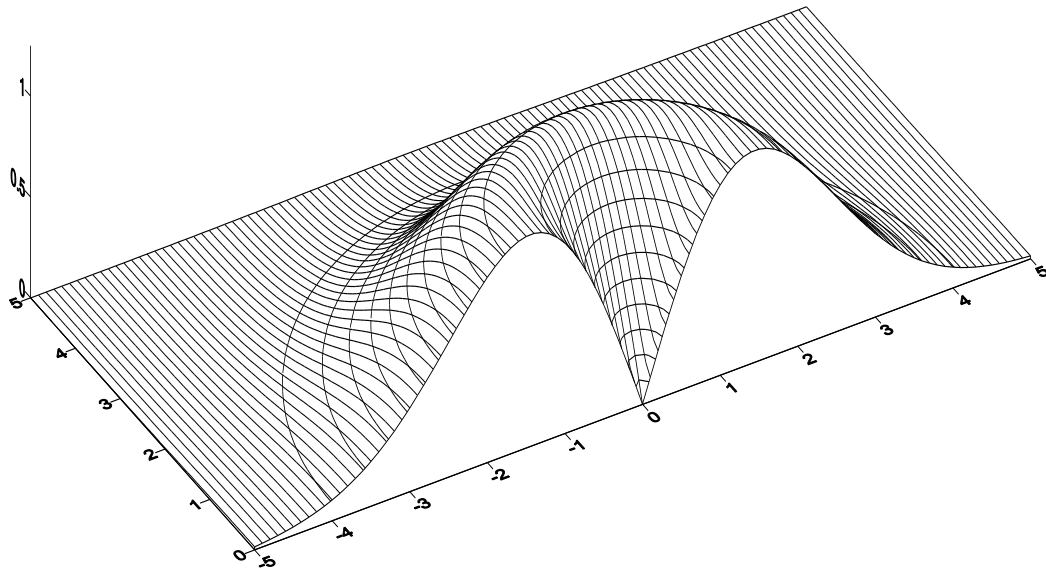


Рис. 8. Сечение двумерной сглаживающей функции на основе выражения (9)

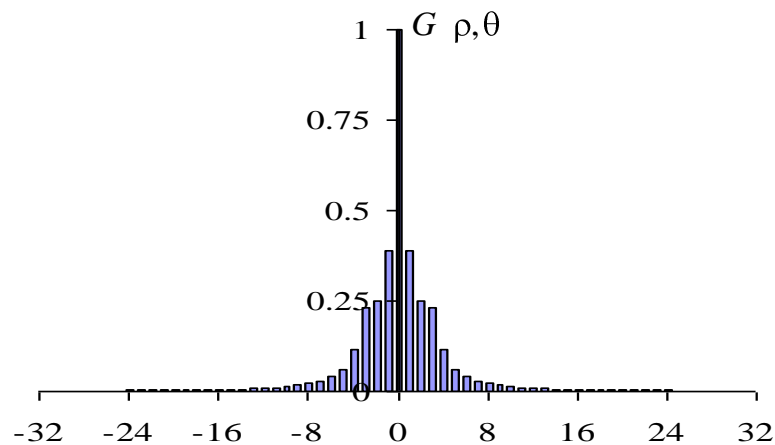


Рис. 9. Одномерное сечение пространственно-частотного спектра  $G(\rho, \theta)$

Видно, что пространственно-частотный спектр предложенной функции монотонно убывает и не имеет выбросов. Благодаря этому импульсный отклик фильтра на сигнал точечного источника будет иметь пренебрежимо малый уровень пульсаций Гиббса. Поэтому выбор такой сглаживающей функции является, по нашему мнению, вполне удовлетворительным.

### Выводы

1. Применение томографических методов обработки акустических шумовых сигналов является радикальным средством повышения точности и разрешающей способности системы по пространственным координатам. Для обеспечения требуемой точности, разрешающей способности обнаружителей и, безусловно, устойчивости вычислительных методов к мешающим шумовым артефактам недостаточно просто повышать требования к системам синхронизации, навигационной привязки, пропускной способности линий передачи данных и быстродействию вычислителей системы обработки.

2. Для разработки практически реализуемых алгоритмов томографической обработки необходимо тщательно выбирать весовые функции двумерной  $\rho$ -фильтрации. Необходимо соответствующим образом модифицировать традиционные алгоритмы компьютерной томографии на основе верного преобразования Радона с учетом характера сигналов, помех

и особенно параметров весовых функций.

3. Облик и конфигурацию системы (число датчиков-приемников, число и варианты размещения устройств совместной обработки, требования к быстродействию системы) планируется рассмотреть при проведении дальнейших исследований. Здесь отметим только, что при современном уровне развития универсальных и специализированных вычислителей (в частности, процессоров быстрых спектральных преобразований, программируемых логических интегральных схем и программируемых логических матриц) наиболее просто можно реализовать алгоритмы многопозиционной компьютерной томографии методами фильтрованных обратных проекций на основе свертки.

### **Литература**

1. Виноградов Н.А. Применение принципов реконструктивной вычислительной томографии в МП РЛС и синтез алгоритмов цифровой обработки информации / Н.А. Виноградов // Тезисы доклада VI всесоюзной конференции "Голография-90". – 18 – 20 сентября 1990 г. – Витебск. – С. 24-25.
2. Хелгасон С. Преобразование Радона / С. Хелгасон. – Москва : Мир, 1983. – 152 с.
3. Пономаренко А.В. Алгоритм обнаружения и измерения координат источника акустических шумов // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2012. – №2(22). – С. 70-75.
4. Пономаренко О.В. Комп'ютеризована система виявлення свищів у продуктопроводах. Дис. канд. техн. наук. – Київ : НАУ, 2011. – 114 с.
5. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции, Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи ; пер. с англ. Н.Я. Виленкина. – Москва : Наука, 1974. – 296 с.
6. Виноградов Н.А. Справочник по устройствам цифровой обработки информации / Н.А. Виноградов, В.Н. Яковлев, В.В. Воскресенский и др.: Под ред. В.Н. Яковлева. – Киев.: Техника, 1988. – 415 с.
7. Тихонов А.Н. Математические задачи компьютерной томографии. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин, А.А. Тимонов. – Москва : Наука, 1987. – 160 с.
8. Kelly E.J. The radar measurement of range, velocity and acceleration /E.J. Kelly // IRE Trans. – 1961. – Vol. MIL-5. – PP. 51-57.
9. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган ; пер. с англ. под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной. – Москва : Наука, 1979. – 832 с.

### *Автори статті*

**Пономаренко Олександр Васильович** – кандидат технічних наук, доцент, директор коледжу Національного авіаційного університету, Київ, Україна. Тел. +38 044 497 33 65. E-mail: vl43@yandex.ru

**Булаковська Анна Олександрівна** – завідувач лабораторії аналізу та обробки інформації, Київський коледж зв'язку, Київ, Україна. Тел. +38 067 985 21 90. E-mail: ryhz@yandex.ua

**Харлай Людмила Олексіївна** – голова циклової комісії інформаційних мереж зв'язку, Київський коледж зв'язку, Київ, Україна. Тел.: +38 099 012 33 23. E-mail: harlay@i.ua.

### *Authors of the article*

**Ponomarenko Oleksandr Vasylyovych** – candidate of science (technic), associate professor, director of college of the National aviation university, Kyiv. Tel.: +38 044 497 33 65. E-mail: vl43@yandex.ru

**Bulakovska Anna Oleksandrivna** – head of laboratory of analysis and treatment of information, Kiev college of communication, Kyiv. Tel. +38 067 985 21 90. E-mail: ryhz@yandex.ua

**Kharlay Lyudmyla Oleksiyivna** – head of department of informative communication networks, Kiev college of communication, Kyiv. Tel.: +38 099 012 33 23. E-mail: lharlay@i.ua

Дата надходження в редакцію: 12.01.2016 р.

Рецензент: д.т.н., проф. М.А. Виноградов