

УДК 004.051

DOI: 10.31673/2786-8362.2024.025091

Сітко Д.О., Гніденко М.П., к.т.н.;
Крилов О.С.

СПЛАЙН-ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Sitko D.O., Hnidenko M.P., Krylov O.S. Interpolation using spline function. This article discusses typical areas of problems for the application of spline functions for the purpose of data interpolation and approximation. An analysis of a large list of modern science literature on the selected topic is presented. Various types of splines, their mathematical properties and areas of application are analyzed. Special attention is paid to the advantages of splines compared to other interpolation methods, due to their high accuracy of approximation, the smoothness of the formed curves, relative simplicity, the possibility of convenient control of the shape and curvature by changing the parameters.

The paper also focuses on the advantages of using splines in the context of vector graphics, including scalability and high resolution of images regardless of their size. Spline-based vector graphics allow creation of visualizations that retain their accuracy and detail at any magnification, which is especially important for technical drawings, computer graphics and deep machine learning.

Various examples of the feasibility of using splines in various fields of science, engineering, signal processing and machine learning are illustrated. These instances demonstrate how splines can be effectively used to solve practical problems while providing high approximation accuracy. The article emphasizes that the use of splines allows not only to improve the quality of interpolation, but also to significantly simplify the process of complex systems modeling.

Keywords: interpolation, segmentation, vectorization, spline, Bezier curve, topological space.

Сітко Д.О., Гніденко М.П., Крилов О.С. Сплайн-функції в задачах інтерполяції. У даній статті розглядаються типові області задач для застосування сплайн-функцій з метою інтерполяції та апроксимації даних. Викладено аналіз великого списку сучасної літератури на обрану тему. Проаналізовано різні види сплайнів, їх математичні властивості та сфери застосування. Особлива увага приділяється перевагам сплайнів у порівнянні з іншими методами інтерполяції, через їх високу точність наближення, гладкість утворюваних кривих, відносну простоту, можливість зручного контролю форми та кривизни шляхом зміни параметрів.

Акцентується увага на перевагах використання сплайнів у контексті векторної графіки, серед яких масштабованість та висока чіткість зображень незалежно від їх розміру. Векторна графіка, що складається зі сплайнів, дозволяє створювати візуалізації, які зберігають свою точність і деталізацію за будь-якого збільшення, що особливо важливо для технічних креслень та комп'ютерної графіки та є придатною для глибокого машинного навчання.

Ілюструються конкретні приклади доцільності використання сплайнів у різних галузях науки, інженерії, обробки сигналів та машинного навчання. Наведені приклади, що демонструють ефективність їх використання для вирішення практичних задач та проблем, забезпечуючи при цьому високу точність апроксимації. У статті наголошується на тому, що використання сплайнів дозволяє не тільки покращити якість інтерполяції, а й значно спростити процес моделювання складних систем.

Ключові слова: інтерполяція, сегментація, векторизація, сплайн, крива Безьє, топологічний простір.

Вступ

Вирішення задач інтерполяції є нагальною проблемою у широкому спектрі напрямів дослідницької діяльності. Використання сплайнів часто відіграє ключову роль для вирішення такої низки задач у різних сферах науки, технологій та інших прикладних дисциплін. Інтерполяція як метод дозволяє як мінімізувати вхідну множину даних, так і розширити її, заповнивши прогалини для забезпечення точного передбачення та моделювання складних систем [28]. Сплайни у свою чергу є ефективним інструментом для забезпечення гладкості і точності апроксимації функцій при мінімальній кількості параметрів за умов як достатності так і нестачі даних.

Сплайни знаходять широке застосування в комп'ютерній графіці для створення плавних і реалістичних зображень [15, 16], в інженерії для моделювання складних конструкцій і процесів, біомедицині для аналізу та обробки медичних даних [4], у фінансах для прогнозуван-

ня ринкових трендів та оптимізації інвестиційних стратегій [19], а також у багатьох інших областях, де потрібен високий ступінь математичної точності та аналітичної достовірності [8].

До унікальних властивостей сплайнів також відносять можливість створення гладкої інтерполяції навіть за наявності розривів у даних, що робить їх кращим вибором для моделювання реальних процесів і явищ [18]. Вони дозволяють створювати безперервні та диференційовані криві, що особливо важливо у завданнях, пов'язаних з управлінням та оптимізацією виробничих процесів, проектування конструкцій у суднобудуванні та авіації, а також у сучасних системах автоматизації та робототехніки.

У даному дослідженні розглядаються сучасні підходи до інтерполяції через використання різних типів сплайнів (лінійних, квадратичних, кубічних та комплексних моделей), їх особливості та галузі застосування. Висвітлюються як теоретичні аспекти, так і практичні приклади успішного використання сплайнів у різних наукових та інженерних задачах [7, 13, 14, 20]. Особлива увага приділяється новим напрямкам та дослідженням, пов'язаним із застосуванням сплайнів у сучасних технологіях, включаючи комп'ютерний зір, машинне навчання та аналіз великих даних [30].

Сплайни є невід'ємною частиною сучасної наукової та інженерної практики, забезпечуючи точність, гнучкість та ефективність у вирішенні широкого спектра завдань, що потребують високого рівня математичного моделювання та аналітики.

Аналіз останніх досліджень. Існує велика кількість нових наукових матеріалів за даною темою, що слугує індикатором актуальності. Останні дослідження в області інтерполяції контурів сплайн-функціями демонструють тенденцію до використання комплексних методів через доступність потужних обчислювальних потужностей та розвиток технологій штучного інтелекту. Невпинний розвиток технологій комп'ютерного зору породжує попит на вдосконалення існуючих методів та породження нових [9, 26].

Для початку існує низка чудових оглядових статей на тему побудови та застосування сплайн-функцій [6, 7, 13, 14] та порівняння точності результатів застосування різних видів сплайн-інтерполяцій [20].

Чжао П., Гао. Ф та інші запропонували спосіб покращення точності B-сплайнів шляхом через підвищення точності підбору траєкторій руху з урахуванням обмежень складання векторів прискорення та уповільнення [8].

Канунго М. розробив метод обробки зображень на основі інтерполяції B-сплайн для розпізнавання дефектів мостового покриття, а саме наявності іржі. Автоматизований метод виявлення дефектів може прийняти рішення, чи містить дане оцифроване зображення моста дефекти шляхом порівняння зображень [11].

Китайські науковці відносно нещодавно запропонували власний метод побудови P-сплайнів на базі існуючих методів, який є відносно простим та має високу точність апроксимації [17].

Існує велика кількість досліджень застосування сплайн-інтерполяцій для аналізу та обробки цифрової інформації [21, 30].

Метою роботи є забезпечити в читача всебічного та глибокого розуміння різних підходів до інтерполяції контурів з використанням сплайн-функцій, а також показати приклади їх застосування в популярних галузях науки як комп'ютерний зір та графічне моделювання. У статті детально розглянуто основні види сплайнів, їх характеристики та особливості, а також проілюстровано конкретні приклади їх використання в прикладних задачах.

Розроблена робота висвітлює методологічні аспекти роботи зі сплайнами, такі як вибір контрольних точок, обчислення вузлів та застосування крайових умов. Розуміння цих аспектів дозволяє адаптувати сплайни під конкретні вимоги для забезпечення оптимальних результатів.

Дане дослідження має на меті надати читачеві теоретичні знання про сплайни та їх види, показати реальні приклади їх практичного застосування, надати рекомендації щодо їх ефективного застосування. Читачі даної роботи зможуть глибше зануритись в область можливостей та обмежень сплайн-функцій, а також побачити перспективи їх використання, майбутній розвиток технологій використання цих методів.

Виклад основного матеріалу дослідження.

Інтерполяція – спосіб знаходження проміжних значень величини за наявним дискретним набором відомих значень. Інтерполяція контурів зображень є одним із ключових завдань у галузі комп'ютерного зору та обробки зображень. Цей процес дозволяє створювати плавні та точні контури, що є важливим для різних задач, таких як розпізнавання об'єктів, аналіз медичних зображень та комп'ютерна графіка [31]. Одним із найбільш ефективних і широко використовуваних методів для перерахованих задач є сплайн-функції. Сплайни дозволяють виконувати інтерполяцію множини контурних точок даних рівнянням сегментованої кривої, забезпечуючи високий рівень гладкості та точності.

Сплайни являють собою шматково-поліноміальні функції, які з'єднуються в вузлових точках таким чином, що створюється безперервна і гладка крива. Є потужним методом для апроксимації гладкої кривої або поверхні, яка проходить через задану множину точок даних. Використовується для створення гладких кривих шляхом з'єднання декількох поліномів на різних інтервалах. Основною ідеєю сплайн-функції є забезпечення безперервності та гладкості на стиках між цими інтервалами, що досягається за рахунок встановлення крайових умов значення функції та її похідних у вузлових точках [2]. Це дозволяє створювати криві, які проходять через задані точки (контрольні точки) або апроксимують їх з високим ступенем точності. Мають високу гнучкість, тому використовуються для моделювання складних форм, що робить їх незамінними в чисельному аналізі, комп'ютерній графіці та обробці зображень.

Однією з ключових переваг використання сплайн-функцій є здатність локально контролювати форму кривої. Так зміна однієї контрольної точки впливає лише на певний сегмент кривої. Ця властивість особливо корисна у прикладних завданнях, де потрібна висока точність, адаптивність та інваріантність форми [1].

За класом задач, в яких використовуються дані функції, можна умовно виділити наступні:

- задачі інтерполяції, де крива має проходити через множину заданих точок із фіксованою похибкою апроксимації;
- кореляційні задачі, в яких крива має проходити через інтервали, представлені комплексними множинами точок, що дозволяє відображати залежності між сусідніми точками.

Типовими галузями застосування сплайн-інтерполяції є:

- Комп'ютерна графіка та анімація, де моделювання графічних елементів об'єктів потребує створення гладких та реалістичних кривих та поверхонь, що мають початкові контури. Сплайни дозволяють маніпулювати формою та іншими просторовими характеристиками, наприклад, для анімації рухів персонажів чи моделювання об'єктів у 3D-графіці.

- Цифрова обробка зображень, де інтерполяція використовується для масштабування, відновлення втрачених даних або доповнення контенту, покращення якості. Інтерпольована структура растрового зображення є адаптивною до описаних трансформацій, оскільки до функції кривизни можна застосовувати афінні перетворення.

- Комп'ютерний зір та машинне навчання. Для вирішення інтелектуальних задач, наприклад розпізнавання та класифікація, кольорові дані часто є інформаційним шумом. Важливим фактором є достатня інваріантність вхідних для чіткої категоризації. Наприклад, формалізація характеристик досліджуваного об'єкту в різних просторових умовах.

- Наукові обчислення та моделювання. Неперервність функції дозволяє моделювати процеси за рамками існуючих експериментальних даних або апроксимувати прогалини [5].

Для іншого класу задач, де кожний елемент вхідної дискретної множини є підмножиною зв'язаних точок, важливо враховувати кореляцію даних для отримання точних та надійних результатів. Низка перерахованих нижче проблем є найбільш поширеними прикладами застосування кореляційної інтерполяції:

- Прогнозування та експериментальне моделювання комплексних процесів, таких як економіка, клімат та часових рядів, представлених взаємопов'язаними фактами, подіями тощо [19].

- Машинне навчання та великі дані. Такі задачі вимагають виявлення складних зв'язків між ознаками у великих наборах даних. Сплайн-функції застосовують для побудови регресійних моделей, кластеризації, стиснення даних з метою підвищення точності та стійкості моделей.

З огляду реалізації основними типами сплайнів є лінійні, квадратичні, кубічні сплайни, а також складніші B-сплайни і NURBS (неоднорідні раціональні B-сплайни) та особливий тип - криві Безьє [6, 22]. Кожен із цих видів має свої специфічні застосування та переваги, що дозволяє вибрати оптимальне рішення в залежності від вимог конкретного завдання.

Типові сплайн-функції розрізняються ступенем полінома, що використовується для інтерполяції. Зі збільшенням ступеня полінома зростає складність обчислень і гладкість кривих. Для побудови лінійного необхідно 2 точки, квадратичного - 3, кубічного - 4 і так далі [10] (рис. 1).

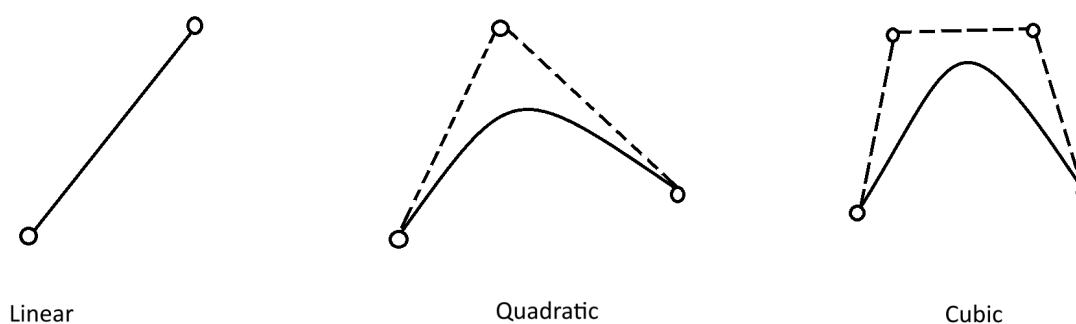


Рис. 1. Основні види сплайн-функцій

Лінійний сплайн є доцільним для використання в ході побудови простих інтерполяцій даних, особливо в системах відображення інформації реального часу через алгоритмічну простоту, але гладкість кривих є низькою аби використовувати такий підхід в задачах комп'ютерного зору.

Квадратичні та кубічні моделі є оптимальним варіантом для задачі інтерполяції контурів. Контур складного об'єкту є неоднорідним та нелінійним, тому комбінації з квадратичних та кубічних сплайнів для апроксимації кривизни є найбільш оптимальним рішенням як в задачах перетворення графіки на навчальний матеріал для машинного навчання, так і трансформації растру в вектор в комерційних цілях [9]. Широко використовуються в інженерії, графічному дизайні, комп'ютерному зорі, а також наукових дослідженнях для інтерполяції даних, апроксимації функцій та моделювання геометричних форм.

B-сплайни та їх покращена версія NURBS – є стандартом в галузі комп'ютерного моделювання. Стійкість до змін в певних вузлах, гладкість форми є максимальною в порівнянні зі звичайними моделями. Базисна функція дозволяє визначати вагу кожної контрольної точки кривої [3, 8, 15 – 17, 35]. Це означає, що форма кривої в кожній точці залежить від своєї “важливості” в контексті всієї кривої. Так зміна однієї контрольної точки впливає тільки на конкретний сегмент кривої, що забезпечує зручне управління формою.

Однією з найпоширеніших областей застосування таких кривих є векторна графіка. Векторизація растрової графіки - це процес, в ході якого відбувається перетворення окремих елементів растрового зображення в векторні структури [21, 22, 26, 27, 29, 31]. Такі структури зазвичай містять опис елементів складних форм у вигляді тих самих сплайн-функцій або кривих Безьє [3, 23], та візуальних атрибутів як колір, структура ліній та інше (рис. 2). Така структура зменшує розмір файлу та підвищує його якість та масштабованість.

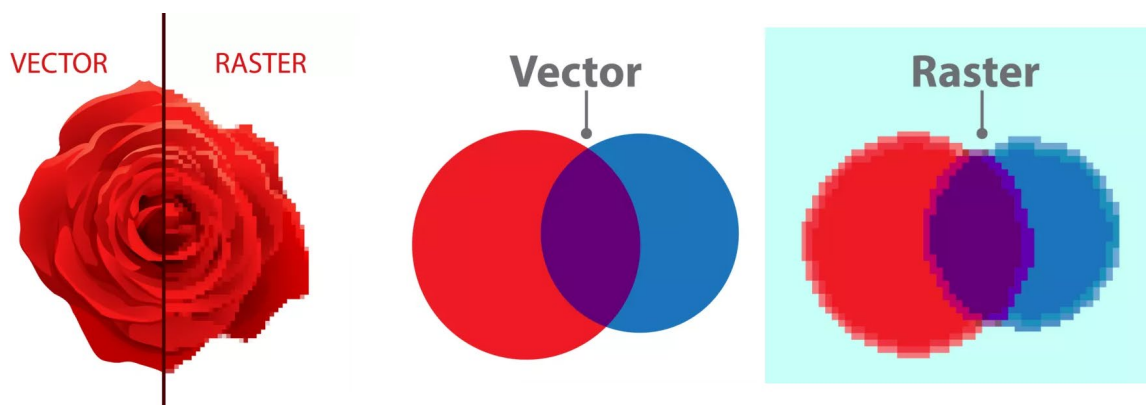


Рис. 2. Покращення якості зображення через векторизацію

Так на рис. 2 піксельне представлення зображуваних об'єктів було перетворено на компактну математичку модель. Застосування афінних перетворень дозволяє маніпулювати масштабом, формою та положенням графіки без втрати якості та низьких обчислювальних витратах.

Іншим доцільним прикладом застосування технік інтерполяції зображення є кластеризація зображення з метою його подальшої обробки, наприклад, для навчання нейро-мережі (рис. 3). Сегментація в задачах машинного навчання з метою класифікації потребує місткий та компактний функціональний опис досліджуваних об'єктів для створення стійкої моделі. Більше того даний приклад демонструє як сплайни дозволяють оптимізувати вирішення задачі кластеризації на етапі виділення границь кластерів [33].

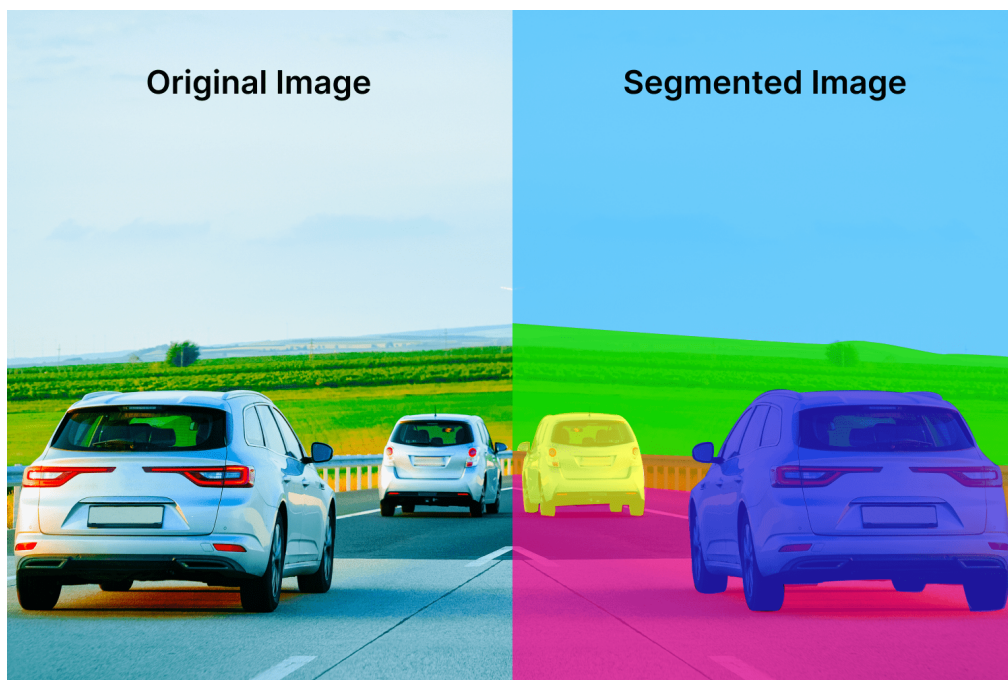


Рис. 3. Сегментація зображення

Векторна анімація дозволяє змінювати форму та положення елементів зображення без його повного перемальовування (рис. 4). Зміна параметрів сегментів певної кривої дозволяє змінювати її положення в просторі через вже згадані афінні перетворення, оскільки сплайни є інваріантними, тобто не деформуються при застосуванні до них операції масштабування, переміщення чи обертання.

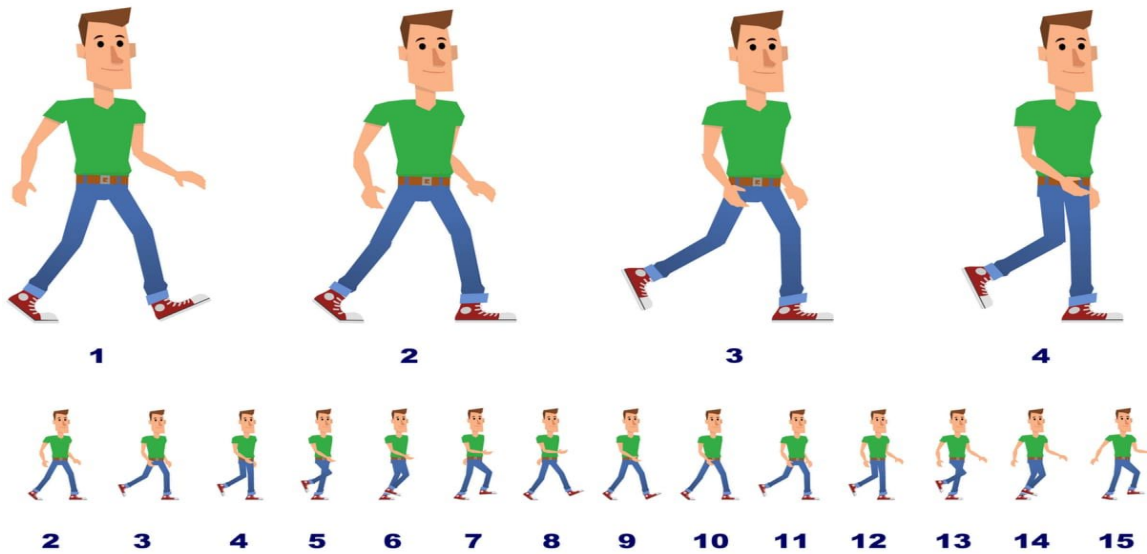


Рис. 4. Анімація

Фінальні рендери на афішах та брошурах або карти місцевості зазвичай вражають своїм рівнем деталізації, але це продукт титанічної роботи інженерів, які створюють комплексні об'єкти із кривих різних типів, або складніших векторних об'єктів [17]. Методи стандартного САД-моделювання перш за все передбачають створення моделей, таких собі каркасів, які надалі модифікуються через створення більш складних одиниць даних, що містять як векторний опис, так і візуальні атрибути як заливки, текстури та інші ефекти (рис. 5).

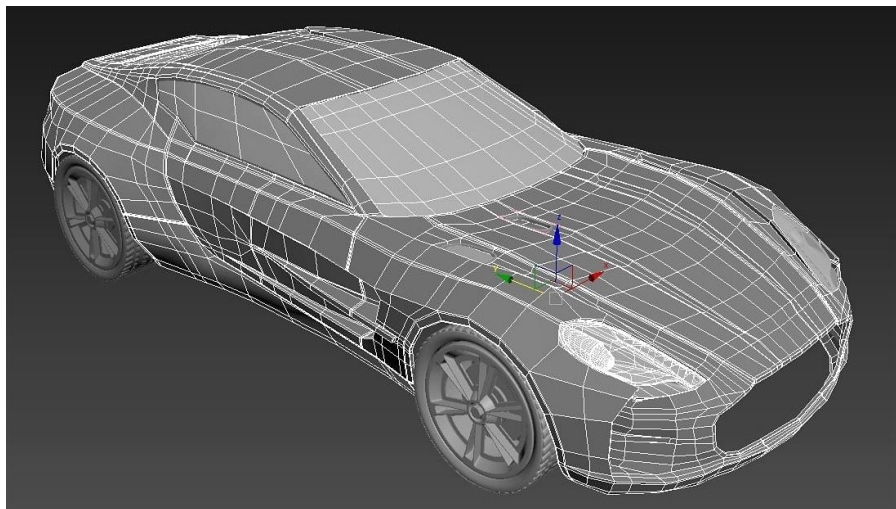


Рис. 5. 3-D моделювання

Висновки

У даній роботі було досліджено характеристики сплайн-функцій, їх доцільність в задачах інтерполяції для забезпечення високої точності і гладкості кривих в різнопланових задачах. Одні й ті самі методи дозволяються вирішити купу різнопланових задач обробки даних в різних галузях. Виділено основні класи задач для вирішення та основні типи реалізації описаних функцій.

Зроблено акцент на застосування інтерполяційних сплайнів в області комп'ютерного зору та векторизації, оскільки аналіз візуальної інформації є однією з найскладніших задач для інтелектуальної цифрової обробки та машинного навчання. Тим цікавіше, що сплайни знайшли широке застосування в даній галузі.

Для більшості розглянутих методів та прикладів застосування приведено актуальні посилання на інші наукові праці. Так читачі цієї роботи зможуть продовжити розробку даної теми у цікавих їм напрямках, оскільки задачі інтерполяції мають безмежне коло проблем для вирішення.

Гнучкість та керованість таких функцій створюють інтерфейс контролю функції, рівня згладжування та точності. Це робить сплайн-інтерполяцію універсальним засобом в задачах моделювання, прогнозування тощо. Проілюстровано конкретні приклади, де інтерполяція дозволяє оптимізувати процес вирішення прикладної задачі.

Список використаної літератури:

1. Андруник, В., & Малачівський, П. (2013). Неперервна та гладка мінімаксна сплайн-апроксимація експоненційним виразом. Національний університет Львівська політехніка.
2. Адашевська, І. Ю., & Краєвська, О. О. (2013). Сплайн-інтерполяція. Механізм зміни стікуючих функцій. Національний технічний університет «ХПІ».
3. Chen, C., & Bi, D. (2021). A motion image pose contour extraction method based on B-spline wavelet. *International Journal of Antennas and Propagation*.
4. Perperoglou, A., Sauerbrei, W., Abrahamowicz, M., & Schmid, M. (2019). A review of spline function procedures in R. *BMC Medical Research Methodology*, 19(1), 46.
5. Prasad, A., Manmohan, A., Shanmugam, P. K., & Kothari, D. P. (2017). Application of cubic spline interpolation technique in power systems: A review.
6. Raseli, S. S., Khusairy Faisal, N. A., & Mahat, N. (2022). The construction of cubic Bezier curve. *Journal of Computing Research and Innovation (JCRINN)*, 7(2), 111-120.
7. Balarama Krishna, C. (2018). Comprehensive review of computational methods based on splines used in the solution towards various classes of singularly perturbed problems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 120(6), 167-188.
8. Zhao, P., Gao, F., Guo, K., Zhang, E., & Li, S. (2024). Trajectory optimization of B-splines interpolation based on dynamic error adjustment. *Journal of Physics: Conference Series*, 2760(1), 012038.
9. Cirilo, E. R., & Natti, P. L. (November 2023). Quality parameter for edge representation of images via cubic spline. *Semina Ciências Exatas e Tecnológicas*.
10. Schumaker, L. L. *Spline functions: Basic theory* (3rd ed.). Cambridge University Press.
11. Qanungo, M. S. K. (2024). Automated defect recognition using spline interpolation. *International Journal of Scientific Research in Engineering and Management*, 8(5), 1-5.
12. Wu, Wen-Yen. (December 2022). Shape recognition using segmenting and string matching. *Asian Journal of Applied Sciences*, 10(6), 528. *Asian Online Journals*.
13. Khlefha, A. R. (2024). A comprehensive review of applications of spline function. *International Academic Journal of Science and Engineering*, 11(1), 322-331.
14. Cuevas, E., Luque Chang, A., & Escobar, H. (2023). Spline interpolation. In *Computational methods with MATLAB* (pp. 151-177). Springer.
15. Schneider, P. (2014). *NURB curves: A guide for the uninitiated*. MACTECH.
16. What is a NURBS? <http://www.rw-designer.com/NURBS>.
17. Wang, Z., Li, Y., Xu, H., & Liu, J. (2022). P-spline curves. *The Visual Computer*, 39(2).
18. Sarfraz, M., & Masood, A. (2007). Capturing outlines of planar images using Bezier cubic. *Computers and Graphics*, 31(2007), 719–729.
19. Waggoner, D. F. (November 1997). Spline methods for extracting interest rate curves from coupon bond prices. *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper* 97-10.
20. Ahmad, N., & Deeba, F. (2020). Study of numerical accuracy in different spline interpolation techniques. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 16 (5), 687-693.
21. Nayak, R., & Patra, D. (2015). Image interpolation using adaptive P-spline. *Annual IEEE India Conference (INDICON)*.
22. Zhang, H., & Feng, J. (2006). *Bezier curves and surfaces* (1).

23. Rizal, S., & Kim, D. S. (2015). Image transmission in military network using Bezier curve. *Journal of Advances in Computer Networks*, 3(2), 141–145.
24. Bezdek, J. C. (1981). *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*.
25. Decker, A. H. (2009). Kohonen neural networks for optimal colour quantization.
26. He, Y., Kang, S. H., & Morel, J. M. (2019). Topology and perception aware image vectorization.
27. Khan, M. (2009). Approximation of circle using cubic Bezier curve.
28. R.K. Bawa, Spline based computational technique for linear singularly per- turbed boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, 167 (2005), 225-236.
29. Selinger, P. (2003). Potrace: A polygon-based tracing algorithm.
30. Shi, J., & Malik, J. (2000). Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.
31. Song, J., et al. (n.d.). Line net global vectorization: An algorithm and its performance evaluation.
32. Uemura, T., & Koutaki, G. (2011). Image segmentation based on edge detection using boundary code. *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*.
33. Valafar, F. (2002). Pattern recognition techniques in microarray data analysis. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 980.
34. Xu, G., & Wang, G.-Z. (August 2008). Extended cubic uniform B-spline and α -B-spline. *Acta Automatica Sinica*, 34(8).

Автори статті

Сітко Денис – аспірант, Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ, Україна.
ORCID: 0009-0005-3275-0070

Гніденко Микола – кандидат технічних наук, доцент, Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ, Україна.
ORCID: 0009-0002-5261-3581

Крилов Олексій – аспірант, Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій, Київ, Україна.
ORCID: 0009-0004-0501-2702

Authors of the article

Sitko Denys – postgraduate, State University of Information and Communication Technologies, Kyiv, Ukraine.
ORCID: 0009-0005-3275-0070

Hnidenko Mykola – Candidate of Science (technic), Associate Professor, State University of Information and Communication Technologies, Kyiv, Ukraine.
ORCID: 0009-0002-5261-3581

Krylov Oleksiy – postgraduate, State University of Information and Communication Technologies, Kyiv, Ukraine.
ORCID: 0009-0004-0501-2702