УДК 658.5.012.7

Мельник Ю.В., д.т.н.; **Пархоменко В.Л.**, к.т.н.; **Пархоменко В.В.**

ОБМЕЖЕННЯ НА ОПЕРАТИВНІСТЬ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ ТА НАДІЙНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

Melnyk Yu.V., Parkhomenko V.L., Parkhomenko V.V. Restrictions on the speed of information processing and reliability of functional transducers of the telecommunication system.

The processing of a given amount of information in a telecommunications system can be represented as a series-connected functional converters. By functional transducers we mean a device for recording, preprocessing information, data transmission equipment, a switching device, input, processing information. In general, this chain of series-connected functional converters is defined as an information processing system. We study the effect of series-connected functional converters on the accuracy of information processing in an information processing system. One of the most important characteristics of the information converter is the reliability of the initial information. The solution to the problem of building an information processing system with minimal expenditures on its implementation and operation requires a systematic approach in determining the parameters of authenticity, reliability, and speed of information processing in each of its subsystems. Rational redistribution of the parameters of authenticity, efficiency and reliability of information processing, the definition of the system's work schedule form a certain commonality of related tasks, the solution of which should be achieved on the basis of system-wide requirements. The formalized formulation of the problem of choosing a complex of technical means for a specific information processing system, taking into account the above defined limitations on the accuracy of information processing and a criterion for comparing competitive options of systems, makes it possible to investigate factors affecting the speed of information processing and to determine dependencies that allow assessing the timeliness of information delivery to the consumer; investigate the impact of information redundancy on the limitations on the speed of information processing; develop models to simulate the process of passing information through the information processing system; determine the methods for solving the problem of a formalized choice of a complex of technical means for a specific information processing system using well-known methods of mathematical programming; preliminarily investigate limitations on the speed of information processing.

Keywords: telecommunication system, parameters, limitation, reliability, reliability, speed of information processing, functional information converter, criterion

Мельник Ю.В., Пархоменко В.Л., Пархоменко В.В. Обмеження на оперативність обробки інформації та надійність функціональних перетворювачів телекомунікаційної системи.

Досліджено процес формування обмеження на оперативність обробки інформації та надійність функціональних перетворювачів у телекомунікаційній системі для формалізованої задачі побудови раціональної системи.

Ключові слова: телекомунікаційна система, параметри, обмеження, оперативність, надійність, швидкість обробки інформації, функціональний перетворювач інформації

Мельник Ю.В., Пархоменко В.Л., Пархоменко В.В. Ограничения на оперативность обработки информации и надежность функциональных преобразователей телекоммуникационной системы.

Исследован процесс формирования ограничения на оперативность обработки информации и надежность функциональных преобразователей в телекоммуникационной системе для формализованной задачи построения рациональной системы.

Ключевые слова: телекоммуникационная система, параметры, ограничения, оперативность, надежность, скорость обработки информации, функциональный преобразователь информации

Вступ

Телекомунікаційна система (мережа телекомунікації та управління мережею телекомунікації) є складним об'єктом, в якій користувач реалізує функції генерування і споживання інформації [1]. Кожен користувач мережі телекомунікації та управління мережею телекомунікації може генерувати інформацію (функція джерела інформації) і споживати інформацію різних джерел. Інформація потрібна споживачеві для вирішення задачі щодо зняття його невизначеності про стан, в якому знаходиться відповідне джерело інформації.

Процес обробки заданого об’єму інформації в телекомунікаційній системі (ТС) можна представити у вигляді послідовно з'єднаних функціональних перетворювачів (ФП). Під ФП розуміємо пристрій реєстрації, попередньої обробки інформації, апаратури передачі даних, пристрої комутації, пристроїв введення та обробки інформації. В цілому вказаний ланцюг послідовно з'єднаних підсистем функціональних перетворювачів визначимо як система обробки інформації (СОІ).

Використовуючи метод суперпозиції із зазначених ланцюгів послідовно з'єднаних функціональних перетворювачів можна отримати загальну структуру телекомунікаційної системи. Витрати на створення і експлуатацію раціональної телекомунікаційної системи (ТС) за рік - $min\, S_{\text{ТС}}$ і витрати на створення і експлуатацію раціональної системи СОІ за рік - $min\, S_{\text{СОІ}}$ знаходяться в співвідношенні:

$$min\, S_{\text{ТС}} = min \sum_{i=1}^{K} S_{\text{СОІ},i} \le \quad min\, S_{\text{СОІ},1} + \; min\, S_{\text{СОІ},2} + \; ... + min\, S_{\text{СОІ},K} \,, \qquad (1)$$

де: K - кількість СОІ в структурі ТС.

Запропонований підхід дозволяє сформувати цілеспрямований процес створення раціональної телекомунікаційної системи.

Час обробки інформації СОІ залежить від аварійних відмов ФП, які є складовими системи. Раціонально побудована система повинна активно протидіяти вказаним перешкодам. Оскільки кількість відмов та час ремонту перетворювачів носять випадковий характер, закономірно розглянути величину:

$$\eta = P\{t_{\text{обр.}} \le T_{\text{доп.}}\} \ge 1 - \varepsilon, \qquad (2)$$

яка дорівнює ймовірності того, що заданий об’єм інформації буде оброблено за допустимий час $T_{\text{доп.}}$. Величина η є показником властивості системи активно протидіяти аварійним відмовам перетворювачів, її нижній допустимий рівень входить в завдання на проектування СОІ. Створюючи систему необхідно забезпечити виконання нерівності $\eta \ge 1 - \varepsilon,$ де ε задається замовником системи та характеризує втрати виробництва у зв’язку із несвоєчасною доставкою об’єму інформації споживачу. Заданий рівень η можливо досягти, створивши в СОІ:

- резерв часу $T_{\text{рем.}}$, який використовується для відновлення працездатності системи у випадку виникнення аварійних відмов у перетворювачах інформації:

$$T_{\text{рем.}} = T_{\text{доп.}} - t_{\text{обр.}} \,, \qquad (3)$$

де: $t_{\text{обр.}}$ – час, який необхідний для обробки об’єму інформації СОІ без врахування часу на ремонт;

- резерв функціональних перетворювачів інформації;

- резерв часу для відновлення працездатності системи у випадку виникнення аварійних відмов у перетворювачах інформації та резерв функціональних перетворювачів інформації (резерв змішаного типу).

Викладення основного матеріалу дослідження

Система з резервом часу. При побудові моделі системи з резервом часу візьмемо наступні основні припущення:

- система складається із N послідовно діючих пристроїв, які працюють незалежно один від одного;

- потік аварійних відмов на k-му пристрою передбачається пуассонівським із параметром λ_k ;

- на відновлення (ремонт, заміна) k-го пристрою потребується час $\tau^{(k)}$.

Розглянемо випадкові величини υ_k, ς_k, які відповідно дорівнюють кількості відмов та часу, що витрачається на ремонт k-го пристрою при обробці заданого об'єму інформації.

Тоді

$$\varsigma_k = \sum_{i=0}^{\upsilon_k} \tau_i^{(k)}, \tag{4}$$

де: $\tau_i^{(k)}$ - незалежні випадкові величини, розподілені як $\tau_i^{(k)}$, α $\tau_0^{(k)} \equiv 0$ для всіх k.

Час, витрачений на ремонт всіх пристроїв системи при обробці заданого об'єму інформації знаходиться за формулою:

$$\varsigma = \sum_{k=1}^{N} \varsigma_k \tag{5}$$

Припустимо, що заданий об'єм інформації складається із V двійкових символів, швидкість обробки інформації k-го пристрою дорівнює C_k *дв.симв./сек.*

Введемо величину

$$T_{\text{рем.}} = T_{\text{доп.}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{V}{\mathrm{C}_k}. \tag{6}$$

Тоді величина η може бути розрахована як:

$$\eta = P\,(\varsigma \le T_{\text{рем.}}) \tag{7}$$

Таким чином, задача знаходження показника η зводиться до пошуку функції розподілення випадкової величини ς, котра визначається рівняннями (4), (5).

З припущення про незалежність функціонування окремих пристроїв системи випливає, що функція розподілення F_ς величини ς, дорівнює її згортці функції розподілення F_{ς_k} величини ς_k, k = 1,2,..., N;

$$F\varsigma(t) = F\varsigma_1 * F\varsigma_2 * \dots * F\varsigma_N(t), \tag{8}$$

де: операція згортка $F * G$ визначається наступним чином:

$$F * G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F\,(t-S) G(dS)$$

або

$$F * G(t) = \int_{0}^{t} F\,(t-S) G(dS)$$

у випадку, якщо розподілення F і G сконцентровані на додатній півосі.

Оскільки час ремонтів ς_k, k = 1,2,..., N заздалегідь невід'ємний, то формула (8) перепишеться у вигляді:

$$F\varsigma(t) = \int_{0}^{t} F\,\varsigma_1(dS) \int_{0}^{t-S_1} F\,\varsigma_2(dS) \dots .. \int_{0}^{t-S_1-\dots-S_{N-1}} F\,\varsigma_N(dS) \tag{9}$$

Визначимо $F\varsigma_k(S),\ k = 1,2,\dots,N,$

$$F\varsigma_k(S) = \mathrm{P}(\varsigma_k < S) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\upsilon_k = n)P(\sum_{i=0}^{n} \tau^{(k)} < S) \tag{10}$$

За умовою пуассоновості потоку аварійних відмов

$$P(\upsilon_k = n) = e^{-\lambda_k t_k} \times \frac{(\lambda_k t_k)^n}{n!} \tag{11}$$

Тут і надалі: t_k=V/C_k - час роботи k-го пристрою при обробці заданого об'єму інформації.

Із умови незалежності випадкових величин $\tau_i^{(k)},\ i \geq 0$:

$$P\left(\sum_{i=0}^{n} \tau_i^{(k)} < S\right) = \int_0^S G_k(du_1) \int_0^{S-U_1} G_k(du_2) \dots . \int_0^{S-U_1-\dots-U_{n-1}} G_k(dU_n), \tag{12}$$

де:

$$G_k(U) = P(\tau^{(k)} < U)$$

Формули (9) - (12) вирішують питання визначення функції розподілу величини ς, а з ним і питання визначення показника η. Однак, отримані формули занадто громіздкі, що суттєво зменшує їхню практичну цінність. Тому являють інтерес розгляд ряду часткових випадків, в яких кінцеві формули набувають простішого вигляду.

1а. Нехай час відновлення $\tau^{(k)},\ k$ = 1,2,..., N носить не випадковий характер. Тоді

$$\eta = \sum_{r_1=0}^{\left[\frac{T_{\text{рем.}}}{\tau^{(1)}}\right]} \sum_{r_2=0}^{\left[\frac{T_{\text{рем.}}-r,\tau^{(1)}}{\tau^{(2)}}\right]} \dots \sum_{r_N=0}^{\left[\frac{T_{\text{рем.}}-r,\tau^{(1)}-r_{N-1},\tau^{(N-1)}}{\tau^{(N)}}\right]} e^{-(\lambda_1 t_1+\dots+\lambda_N t_N)} \times \\ \times \frac{(\lambda_1 t_1)^{r_1}}{r_1!} \frac{(\lambda_2 t_2)^{r_2}}{r_2!} \dots \frac{(\lambda_N t_N)^{r_N}}{r_N!} \tag{13}$$

1б. Нехай в припущеннях п.1а, крім того $\tau^{(k)}$= τ. Тоді

$$\eta = \sum_{r=0}^{R} e^{-\mu} \frac{\mu^2}{r!}, \tag{13}$$

де:

$$\mu = \sum_{k=1}^{N} \frac{V\lambda_k}{C_k}, \qquad R = \left[\frac{T_{\text{рем.}}}{\tau}\right] \tag{14}$$

1в. Нехай для усіх K величина $\tau^{(k)}$ має показникові розподілення із середнім $\rho_k = \frac{1}{\mu_k}$. Тоді:

$$\eta = \int_0^{T_{\text{рем.}}} \mathrm{f}_1(t_1)\, dt_1 \int_0^{T_{\text{рем.}}-t_1} \mathrm{f}_2(t_2)\, dt_2 \dots \int_0^{T_{\text{рем.}}-t_1-\dots-t_{N-1}} \mathrm{f}_N(t_N)\, dt_N, \tag{15}$$

де:

$$\mathrm{f}_k(t_k) = \begin{cases} \mu_k \times e^{-(\lambda_k t_k+\mu_k t_k)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\mu_k t_k)^r}{r!} - \frac{(\lambda_k t_k)^{r+1}}{(r+1)!}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \tag{16}$$

Подальші спрощення пов'язані з використанням нерівності Чебишева. Перепишемо формулу (7) у вигляді: $\eta = 1 - P\ (\varsigma > T_{\text{рем.}})$, тоді нерівність (7) еквівалентна наступному:

$$P\ (\varsigma > T_{\text{рем.}}) \leq \varepsilon \qquad (17)$$

Оскільки випадкова величина ς розподілена на позитивній півосі, ми маємо всі підстави скористатись нерівністю Чебишева в формі:

$$P\ (\varsigma > T_{\text{рем.}}) \leq \frac{1}{T_{\text{рем.}}} E\varsigma, \qquad (18)$$

де: $E\varsigma$ - математичне очікування випадкової величини ς.

Із представлення (4) і (5) видно, що

$$E\varsigma = \sum_{k=1}^{N} E\varsigma_k = \sum_{k=1}^{N} E\ \nu_k E\tau^{(k)} = V \sum_{k=1}^{N} E\,\frac{\lambda_k}{C_k} E\tau^{(k)} \qquad (19)$$

Тому

$$P\ (\varsigma > T_{\text{рем.}}) \leq \frac{V}{T_{\text{рем.}}} \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{C_k} E\tau^{(k)}, \qquad (20)$$

а значить для виконання нерівності (17) достатньо, щоб

$$V \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{C_k} E\tau^{(k)} \leq \varepsilon T_{\text{рем.}} \qquad (21)$$

Зрозуміло, що у випадку ***1а*** в формулі (21) $E\tau^{(k)} = \tau^{(k)}$:

- у випадку ***1б*** $E\tau^{(k)} = \tau$,
- у випадку ***1в*** $E\tau^{(k)} = \rho_k = \frac{1}{\mu_k}$.

Формула (21) досить наглядна, хоча, вона суттєво звужує область зміни параметрів системи ($\lambda_k, C_k, E\tau^{(k)}$).

Залежності (13-15,21) дозволяють забезпечити своєчасну доставку інформації до споживача, при наявності резерву часу на ремонт пристроїв, що відмовили. У формалізованій постановці задачі вибору комплексу технічних засобів для СОІ залежності (13-15,21) в подальшому використовується як обмеження на оперативність обробки інформації.

Система з резервом пристроїв. При складанні моделі системи з резервом пристроїв приймемо наступні основні припущення:

- система складається із N послідовно діючих груп, одного типу в кожній групі, пристроїв. В i-ій групі мається m_i, працюючих пристроїв, які діють паралельно і r_i - резервних. Передбачається, що всі пристрої, які входять в систему, працюють незалежно один від одного;

- потік аварійних відмов на пристроях i-ої групи визначається пуассонівським із параметром λ_i;

- на відновлення кожного пристрою i-ої групи потрібен час $\tau^{(i)}$. Відносно величини $\tau^{(i)}$ пропонується, що вона розподілена за показниковим законом з параметром:

$$E\tau^{(i)} = \frac{1}{\mu_i}$$

Якщо пристрої m_i, i = 1,2,..., N, вибрані так, що при роботі без відмов всіх пристроїв система передає необхідний об'єм інформації за час $T_{\text{доп.}}$, то для виконання нерівності $\eta \geq 1 - \varepsilon$ достатньо підібрати резерв r_i , i = 1,2,..., N таким чином, щоб з ймовірністю $1 - \varepsilon$ забезпечити наявність m_i, i = 1,2,..., N дієздатних пристроїв протягом всього часу обробки інформації.

Аналогічне завдання ставилась, однак автор припустився помилки, суть якої полягає в тому, що розподіл максимуму випадкового процесу $\varsigma(t)$ на деякому інтервалі часу $[0, T]$ під приводом стаціонарності цього процесу були замінені розподіленням значення $\varsigma(t_0)$ в одній фіксованій точці.

Розглянемо наступну схему. Нехай кількість пристроїв i-ї групи необмежена, в роботі постійно знаходиться m_i пристроїв, які дають пуассонівський потік пристроїв, які відмовили з параметром $m_i\lambda_i$. Якщо позначити кількість несправних пристроїв в момент часу t через $\varsigma_i(t)$, то при умові

$$\frac{m_i\lambda_i}{\mu_i} = p_i < 1 \tag{22}$$

марківський процес $\varsigma_i(t)$ має єдине стаціонарне розподілення :

$$P_0 = 1 - p_i, \quad P_k^i = p_i^k(1 - p_i), \quad k = 1,2, \ldots, \tag{23}$$

де $P_k^i = P\,(\varsigma_i(t) = k)$.

У відповідності з вищевикладеним, резерв r_i , i = 1,2,..., N повинен бути визначений так, щоб

$$\prod_{i=1}^{N} P\,(\max\varsigma_i(t) \le r_i) \ge 1 - \varepsilon\,, \tag{24}$$

де $t_i = \frac{V}{C_i m_i}$.

Таким чином, проходимо до задачі знаходження розподілення випадкових величин:

$$\max_{0\le t\le t_i}\varsigma_i(t), \qquad i = 1,2, \ldots, N.$$

Нижче запропоновано два шляхи вирішення цієї задачі. Принципові труднощі зустрічаються на першому шляху і зводяться до розв'язку алгебраїчних рівнянь високих показників степеня; на другому шляху приходимо до необхідності вирішення системи лінійних диференційних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Радикальний метод боротьби з виникаючими труднощами полягає в залученні комп'ютерів до розв'язання вказаних задач.

1-й метод знаходження розподілень $\max\limits_{0\le t\le t_i}\varsigma_i(t)$.

Із (23) можна зробити висновок, що:

$$\begin{aligned} P(max\varsigma_i(t) \le r) &= \sum_{k=0}^{r_i} p_i^k\,(1 - p_i) \times \\ &\times P(max\,\varsigma_i\,(t) \le r_i \,|\, \varsigma_i(0) = k) = \\ &= (1 - p_i)\sum_{k=0}^{r_i} p_i^k\,P\big(\theta_{k,r_i+1}^i > t_i\big), \end{aligned} \tag{25}$$

де: $\theta_{k,l}^i$ при $k< l$ означає момент першого досягнення процесом $\varsigma_i(t)$, що виходить із стану k рівня l. Задача зводиться до пошуку розподілень випадкових величин θ_{k,r_i+1}, $k = 0,1, \ldots, r_i$.

В подальшому, індекс i**,** що фіксує номер групи пристроїв, будемо опускати. Введемо перетворення Лапласа величин $\theta_{k,r+1}$:

$$\varphi_k^{(r+1)}(S) = Ee^{-S\theta_{k,r+1}}, \qquad k = 0,1, \ldots, r$$

Як відомо, за $\varphi_k^{(r+1)}(S)$ однозначно відтворюється функція розподілення величини θ_{k,r_i+1}.

Виходячи із визначення величини $\theta_{k,r+1}$, можливо зробити висновки про те, що функції $\varphi_k^{(r+1)}(S)$, $k = 0,1, \ldots, r$ задовольняють наступну систему лінійних рівнянь:

Для $r = 0$:

$$\varphi_0^{(1)}(S) = \frac{m\lambda}{S + m\lambda} \tag{26}$$

Для $r \ge 1$:

$$\begin{cases} \varphi_0^{(r+1)}(S) = \dfrac{m\lambda}{S+m\lambda}\varphi_1^{(r+1)}(S), \\ \varphi_k^{(r+1)}(S) = \dfrac{m\lambda}{S+m\lambda+\mu}\,\varphi_{k+1}^{(r+1)}(S) + \dfrac{\mu}{S+m\lambda+\mu}\,\varphi_{k-1}^{(r+1)}(S), k=1,2,\dots,r-1, \\ \varphi_r^{(r+1)}(S) = \dfrac{m\lambda}{S+m\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{S+m\lambda+\mu}\,\varphi_{r-1}^{(r+1)}(S). \end{cases} \quad (27)$$

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь (27) отримаємо:

$$\varphi_k^{(r+1)}(S) = \frac{\Delta_k^{(r+1)}(S)}{\Delta^{(r+1)}(S)}, \qquad r=0,1,\dots,\ k=0,1,\dots,r, \quad (28)$$

де: $\Delta_k^{(r+1)}(S)$, $\Delta^{(r+1)}(S)$ поліноми в ступені r та $r+1$ відповідно.
Нехай

$$\Delta^{(r+1)}(S) = \alpha_0 \prod_{l=1}^{L}(S - S_l^{\alpha_l})$$

Тут $S_l, l=1,2,\dots,L$ - корені (можливо комплексні) полінома $\Delta^{(r+1)}(S)$; α_l, $l=1,2,\dots,L$ - кратності відповідних коренів. Тоді зворотне перетворення Лапласа [9] функції $\varphi_k^{(r+1)}(S)$ дорівнює:

$$f_k^{(r+1)}(t) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{\alpha_l} H_{l,j}^{(r+1),k} t^{\alpha_l - j} e^{S_l t}, t \ge 0, \quad (29)$$

де:

$$H_{l,j}^{(r+1),k} = \frac{1}{(j-1)!\,(\alpha_l-j)!}\cdot\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\times\left[\frac{(S-S_l)^{\alpha_l}\Delta_k^{(r+1)}(S)}{\Delta^{(r+1)}(S)}\right]_{S=S_l}.$$

Тепер формулу (25) можна записати у вигляді:

$$P\left(\max_{0\le t\le t_i} \varsigma(t) \le r_i\right) = (1-\rho_i)\sum_{k=0}^{r_i}\rho_i^k \int_{t_i}^{\infty} f_k^{(r_i+1)}(t)dt. \quad (30)$$

2-й метод знаходження розподілень $\max\limits_{0\le t\le t_i} \varsigma_i(t)$

Водночас з однорідним марківським процесом $\varsigma_i(t)$, рівним кількості несправних пристроїв i-го типу в момент часу t, розглянемо процес

$$\eta_i(t) = \max_{0\le s\le t} \varsigma_i(S)$$

Процес $\eta_i(t)$ не є марківським, однак двомірний процес $\{\eta_i(t), \varsigma_i(t)\}$ - це однорідний у часі стрибкоподібний марківський процес, який змінюється на множині пар (j,k) невідємних цілих чисел, таких що $j \ge k$. Його інфінітезимальні характеристики визначаються за виразом:

$$P\{(\eta_i(t+h), \varsigma_i(t+h)) = (\tilde{j},\tilde{k}) | (\eta_i(t),\varsigma_i(t)) = (j,k)\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda_{j,k}^{(i)} h + O(h) & \text{при } \tilde{j}=j, \quad \tilde{k}=k+1 \\ \mu_{j,k}^{(i)} h + O(h) & \text{при } \tilde{j}=j, \quad \tilde{k}=k-1 \\ v_{j,k}^{(i)} h + O(h) & \text{при } \tilde{j}=j+1, \ \tilde{k}=k+1 \\ 1 - \left(\lambda_{j,k}^{(i)} + \mu_{j,k}^{(i)} + v_{j,k}^{(i)} h\right)h + O(h) & \text{при } \tilde{j}=j, \ \tilde{k}=k \\ O(h) & \text{в решті випадків} \end{cases}$$

де:

$$\lambda_{j,k}^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \le k, \\ m_i \times \lambda_i & \text{при } j > k, \end{cases}$$

$$\mu_{j,k}^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } j < k \text{ та при } k = 0, \\ \mu_i & \text{при } j \le k > 0, \end{cases}$$

$$v_{j,k}^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \ne k, \\ m_i \times \lambda_i & \text{при } j = k. \end{cases}$$

Тоді величини $P_{j,k}^{(i)}(t)$ рівні ймовірності:

$$\mathrm{P}\{\eta_i(t) = j, \varsigma_i(t) = k\}\ j, k \,\epsilon\, Z,$$

задовольняють систему диференційних рівнянь:

$$\frac{d}{dt} P_{j,k}^{(i)}(t) = -\left(\lambda_{j,k}^{(i)} + \mu_{j,k}^{(i)} + v_{j,k}^{(i)}\right) P_{j,k}^{(i)}(t) + \lambda_{j,k}^{(i)} P_{j,k-1}^{(i)}(t) + \\ + \mu_{j,k+1}^{(i)} P_{j,k-1}^{(i)}(t) + v_{j-1,k-1}^{(i)} P_{j-1,k-1}^{(i)}(t) \quad (31)$$

з початковими умовами

$$P_{j,k}^{(i)}(0) = \begin{cases} (1-\rho_{\mathrm{i}})\rho_{\mathrm{i}}^k & \text{при } j \ge k\,, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

У (31) вважаємо

$$\lambda_{j,k-1}^{(i)} = v_{j-1,k-1}^{(i)} = 0 \quad \text{при} \quad k = 0.$$

Зазначимо, що специфіка нескінченної системи (31) полягає в її рекурентності. Тому для визначення невідомих $P_{j,k}^{(i)}(t), k, j \le \tau$, достатньо розв'язати кінцеву підсистему порядку

$$\frac{1}{2}(\tilde{\jmath}+1)(\tilde{\jmath}+2)$$

Тепер ймовірність, що нас цікавить визначається наступним чином:

$$P\{\max \varsigma_i(t) \le r_i\} = \sum_{j=0}^{r_i} P\,\{\eta_i(t_i) = j\} = \\ = \sum_{j=0}^{r_i} \sum_{k=0}^{j} \mathrm{f}\{\eta_i(t_i) = j, \varsigma_i(t_i) = k\} = \sum_{j=0}^{r_i} \sum_{k=0}^{j} P_{j,k}^{(i)}(t_i) \quad (32)$$

де: функція $P_{j,k}^{(i)}(t_i)$, $k \le j \le r_i$ знаходиться як розв'язок системи (31).

Залежності (31, 32) використовуються в задачі формалізованого вибору комплексу технічних засобів для СОІ с резервом пристроїв як обмеження на оперативність обробки інформації.

Система змішаного типу. Розглянемо наступну модель системи:

- заданий i-ий рівень обробки інформації;
- на цьому рівні інформація обробляється $m_i + r_i$ однотипними паралельно діючими пристроями. Швидкість роботи кожного з цих пристроїв c_i, зн/сек. Одночасно працюють не більш m_i пристроїв.

Пристрої, які в даний момент не беруть участь в процесі обробки інформації, називають резервними. При цьому резервні пристрої діляться на активні і пасивні.

Активний резерв - це справні пристрої, що знаходиться в резерві. Пасивний резерв - це несправні пристрої, які вимушені знаходитися в резерві.

На кожний з працюючих пристроїв i-го рівня діє пуассонівський потік відмов з параметром λ_i.

Пристрій, що відмовив, потрапляє в пасивний резерв, де стає в чергу на обслуговування (відновлення). Час відновлення одного пристрою розподілено по показовому закону з середнім $\frac{1}{\mu_i}$. Після відновлення пристрій надходить до активного резерву. Замість пристрою, що відмовив, в процес обробки інформації на i-му рівні включається пристрій з активного резерву (якщо у момент відмови активний резерв порожній, то заміна відбувається у момент поповнення активного резерву).

Передбачається, що система повинна, з вірогідністю $1-\varepsilon$ передати даний об'єм інформації $V=\sum_{j=0}^{j} V^j,\ \ j=1,2\ldots,J$ дв. символів за час $\mathrm{T}_{\text{доп.}}$:

$$\eta = P\{t_{\text{обр.}} \leq \mathrm{T}_{\text{доп.}}\} \geq 1-\varepsilon.$$

Об'єми інформації завантажують систему рівномірно і $J >> m_i$.

Розглянемо величину $\varsigma_i(t)$ рівну кількості пристроїв i-го рівня, що знаходиться в момент часу t в пасивному резерві. Тоді із викладеного вище виходить, що $\varsigma_i(t)$ -однорідний за часом марківський процес, що змінюється на цілих точках інтервалу $[0,\ m_i+r_i]$. Інфінітезимальні характеристики цього процесу задаються співвідношеннями:

$$P\{(\varsigma_i(t+h)) = j | \varsigma_i = k\} =$$
$$= \begin{cases} \lambda_k^{(i)} h + 0(h) & \text{при} \quad j=k+1; \\ \mu_k^{(i)} h + 0(h) & \text{при} \quad j=k-1, k>0; \\ 1-\left(\lambda_k^{(i)}+\mu_k^{(i)}\right)h + 0(h) & \text{при}\ j=k; \\ 0(h) & \text{в решті випадків,} \end{cases} \tag{33}$$

де: $\lambda_k^{(i)} = \lambda_i \min(m_i, m_i+r_i-k)$;

$$\mu_k^{(i)} = \begin{cases} \mu_i & \text{при}\ k \neq 0, \\ 0 & \text{при}\ k=0. \end{cases} \tag{34}$$

За величиною $\varsigma_i(t)$ визначимо величину

$$\eta_i(t) = \min(m_i, m_i+r_i-\varsigma_i(t)), \tag{35}$$

що дорівнює кількості пристроїв i-го рівня передаючих інформацію в момент часу t.

Тоді випадковий процес

$$I_i(t) = c_i \int_0^t \eta_i(S) dS$$

являє собою кількість інформації, обробленими пристроями i-го рівня до моменту часу t.

Введемо величину $\theta_i = inf\{t \cdot I_i(t) \geq V\}$, суть якої в тому, що це час, за який пристрої i-го рівня обробляють задану кількість інформації V.

Враховуючи, що має місце співвідношення

$$P\{\theta > t\} = P\left(\int_0^t \eta_i(S) dS\right) \leq \frac{V}{c_i}. \tag{36}$$

Завдання розподілення величин η_i, зводиться до знаходження розподілення випадкових величин

$$\int_0^t \eta_i(S) dS, \qquad i=1,2,\ldots,N.$$

Для спрощення запису індекс „ i ” далі буде опускатись.

Враховуючи стрибкоподібний характер траєкторії процесу η_τ можемо підсумувати, що

$$\int_0^t \eta(S) dS = \sum_{k=1}^{v(t)} f(\varsigma_{k-1}) \tau(k-1, \varsigma_{k-1}) + \chi(t), \tag{37}$$

де $f_{(k)} = min\{m, m+r-k\}$;

$\varsigma_n, n > 0$ - ланцюг Маркова, вкладений в процес $\varsigma(t)$, тобто

ς_n - значення процесу $\varsigma(t)$ в момент n-го стрибка.

Матриця перехідних ймовірностей

$$P = \|P_{k,j}\| \begin{matrix} m+r \\ j,k=0 \end{matrix}$$

цього кола задається наступним чином:

$$P_{k,j=} \begin{cases} \mu_k/\lambda_k + \mu_k & \text{при } j = k-1, \quad 0 < k < m+r; \\ \mu_k/\lambda_k + \mu_k & \text{при } j = k+1, \quad 0 < k < m+k;, \\ 1 & \text{при } k = 0, j = 1 \cup k = m+r, j = m+r-1; \\ 0 & \text{в решті випадків} \end{cases} \tag{38}$$

де: $\{\tau(n,j), n$=0,1,..., j=0,1,...,$m+r\}$ - сімейство незалежних випадкових величин, які не залежать від кола $\varsigma_n, n \geq 0$; розподіл величин $\tau(n,j)$ не залежить від n і задається формулою:

$$P\{\tau(n,j) > t\} = e^{-(\lambda_i+\mu_i)t}$$

Величина $\tau(n,j)$ інтерпретується як час n -го „сидіння" процесу $\varsigma_i(t)$ в стані j, $\nu(t) = \min\{n: \sum \tau(k,\varsigma_k) > t\}$ - кількість „стрибків" процесу $\varsigma(t)$ до моменту t; величина $\chi(t)$ - тривалість останнього процесу обмежена по ймовірності, як функція t.

Визначення (37) дозволяє скористатись загальними теоремами про додавання випадкових величин, заданих на напівмарківськім процесі стверджувати асимптотичну нормальність величини$\int_0^t \eta(S)dS$.

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\int_0^t \eta\,(S)dS - at}{\sigma\sqrt{t}} < X\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \tag{39}$$

де:

$$a = \sum_{j=0}^{m=r} \frac{\pi_j f(j)}{\lambda_j + \mu_j} \Bigg/ \sum_{j=0}^{m+r} \frac{\pi_j}{\lambda_j + \mu_j} \tag{40}$$

$$\sigma^2 = \frac{2}{\sum_{j=0}^{m+r} \frac{\pi_j}{\lambda_j + \mu_j}} \left(\sum_{j=0}^{m+r} \frac{(f(j)-a)^2}{m_{jj}(\lambda_j+\mu_j)^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{m+r} \frac{f(j)-a}{m_{jj}\left(\lambda_j+\mu_j\right)} \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{m+r} \frac{(m_{jl}+m_{lk}-m_{jk})(f(k)-a)}{m_{kk}(\lambda_k+\mu_k)}\right) \tag{41}$$

Величини $\pi_j, m_{jk}, j, k = 0, m+r$, які фігурують в (40) і (41) визначаються за ланцюгом $\varsigma_n, n \geq 0$ наступним чином: $\vec{\pi} = (\pi_k, k = 0,1 \dots, m+r)$ вектор стаціонарних ймовірностей кола є єдиним невід'ємним рішенням системи:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{m+r} \pi_i = 1, \\ \vec{\pi}\, P = \pi \end{cases} \tag{42}$$

де: $m_{j,k}$ - середня кількість кроків кола до першого потрапляння до стану K при умові, що коло виходить із стану j.

$$m_{j,k} = \sum n f_{j,k}^{(n)}, \tag{43}$$

де: $f_{j,k}^{(1)} = P_{j,k}^{(1)}$

$$f_{j,k}^{(n+1)} = P_{j,k}^{(n+1)} - \sum f_{j,k}^{(s)} P_{kk}^{(n+1-s)}, n \geq 1 \tag{44}$$

В формулі (44) величини $P_{j,k}^{(n)}$ елементи матриці P^n.

Величини $f_{j,k}^{(n)}$- суть ймовірності того, що коло ς_n, виходячи із стану j на n-му кроці вперше досягне стану K. Тоді величини m_{jk} слід розуміти як середня кількість кроків кола ς_n із стану j в стан K.

Зауважимо, що

$$\pi_k = \frac{1}{m_{kk}}, k = 0,1, \dots, m + r$$

асимптотична нормальність величини $\int_0^t \eta(S)dS$ стверджується формулою (39), дозволяє наближено продовжити рівність (36).

$$p\{\theta_i > t\} = P\left\{\int_0^t \eta_i(S)dS \leq \frac{V}{C_i}\right\} \approx \Phi\left(\frac{V - \alpha_i c_i t}{\sigma_i c_i \sqrt{2\pi}}\right),$$

де:

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} e^{-\frac{U}{2}} dU$$

вирішує проблему визначення величини η в схемі, що розглядається:

$$\eta = P\{\theta_i \leq T_{\text{доп.}}\} = \int_0^{T_{\text{доп.}}} f_i(t)dt, \tag{45}$$

де:

$$f_i(t) = \left(\frac{\alpha_i}{2\sigma_i\sqrt{2\pi t}} + \frac{V}{2\sigma_i c_i t\sqrt{2\pi t}}\right) exp\left\{-\frac{(V - a_i c_i t)^2}{2\sigma_i^2 c_i^2 t}\right\}$$

Залежність (45) використовується в задачі формалізованого вибору комплексу технічних засобів для СОІ як обмеження на оперативність обробки інформації.

Висновки

З метою визначення впливу надійності технічних засобів і системи обслуговування пристроїв, які відмовили, на оперативність обробки інформації, для СОІ з резервом часу на ремонт пристроїв, які відмовили; з резервом пристроїв; з резервом змішаного типу, визначені та досліджені з допомогою програмно – технічних комплексів залежності, які оцінюють своєчасність обробки інформації ймовірністю (η) того, що інформація буде доставлена споживачу в обумовлений час. Для системи з резервом часу визначені та досліджені залежності η за умови, коли на відновлення (ремонт, заміну) κ - го функціонального перетворювача потрібний час $\tau^{(k)}$, $k = 1,2, \dots,$ N, що носить невипадковий характер; крім того розглянуті випадки коли $\tau^{(k)} = \tau$ та величина τ^k має показникові розподілення із середнім $\rho_\text{к} = \frac{1}{\mu_\text{к}}$. Проведені дослідження формалізованої задачі побудови системи із резервом перетворювачів дозволили сформувати два шляхи її рішення. Принципіальна складність, яка зустрічається на першому шляху, приводить до рішення алгебраїчних рівнянь високих степенів, на другому шляху до необхідності розв'язків системи лінійних диференційних рівнянь із постійними коефіцієнтами. При дослідженні формалізованої задачі побудови системи із резервом часу та перетворювачів були використані загальні теореми про додавання випадкових величин, які задаються на полумарковському процесі, доказані в роботах Чжун Ю., Сільвестрова Д.С. та отримана асимптотично нормальна величина η.

Список використаної літератури

1. Стеклов В. К. Проектування телекомунікаційних мереж / В. К. Стеклов, Л. Н. Беркман. – Київ: Техніка, 2002. – 792 с.

2. Пархоменко В.В. Метод моделювання процесів обробки інформації для побудови раціональної телекомунікаційної системи / Мельник Ю.В., Пархоменко В.Л., Пархоменко В.В. / /Білорусія. Мінськ. 2018.

3. Пархоменко В.В. Формалізована задача побудови раціональної телекомунікаційної системи / Мельник Ю.В., Пархоменко В.Л., Пархоменко В.В. // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2018. – № 4(52). – С. 15-24.

4. Пархоменко В.В. Вплив методів введення інформаційної надмірності на обмеження за достовірністю і оперативністю обробки інформації у телекомунікаційній системі / Мельник Ю.В., Пархоменко В.Л., Пархоменко В.В.// Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2018. – № 3(60).

5. Пархоменко В.В. Обмеження на достовірність обробки інформації в телекомунікаційній системі, критерій для порівняння конкурентоздатних варіантів / Мельник Ю.В., Пархоменко В.Л., Пархоменко В.В. // Зв'язок. – 2018. – №4

6. Отрох С.І. Методика оцінювання сталості телекомунікаційної мережі в умовах дії зовнішніх непрогнозованих дестабілізуючих факторів / С.І. Отрох, В.Б. Толубко, Л.Н. Беркман, В.О. Ярош // Зв'язок. – 2016. – № 5 (105). – С. 3-7.

7. Отрох С.І. Методи забезпечення стійкості мережі майбутнього до дії зовнішніх дестабілізуючих факторів / С.І. Отрох, В.О. Ярош, В.О. Власенко, Ю.М. Зіненко // Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2017. – № 2. – С. 24-30.

Автори статті

Мельник Юрій Віталійович – доктор технічних наук, завідувач кафедри Телекомунікаційних технологій, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна.

Пархоменко Володимир Лукич – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри Мобільних та відеоінформаційних технологій, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна.

Пархоменко Вячеслав Володимирович – здобувач кафедри Телекомунікаційних технологій, Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна.

Authors of the article

Melnik Yuriy Vitaliyovych – doctor of Science (technic), Head of the Department of Telecommunication Technologies, State university of telecommunications, Kyiv, Ukraine.

Parkhomenko Volodymyr Lukych – candidate of Science (technic), assistant professor of the Department of Mobile and Video Information Technologies, State university of telecommunications Kyiv, Ukraine.

Parkhomenko Viacheslav Volodymyrovych – candidate of the Department of Telecommunication Technologies, State university of telecommunications, Kyiv, Ukraine.

Дата надходження в редакцію: 16.01.2019 р. Рецензент: д.т.н., доцент С.І. Отрох