

МАТРИЦЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПЛАНАРНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Получены аналитические выражения для матриц сопротивлений двумерных цепей прямоугольной формы при различных граничных условиях.

Ключевые слова: матрица сопротивления, цепная матрица, четырёхполюсник.

При построении пассивных устройств сверхвысоких частот (СВЧ) систем телекоммуникаций и информационной безопасности на основе планарных цепей (двухмерных цепей) обычно используются электродинамические методы расчёта [1-5], которые допускают точное решение лишь в отдельных частных случаях. При расчёте таких устройств как фильтры, резонаторы, цепи согласования и другие, при использовании электродинамических методов обычно ограничиваются основным типом волны, что снижает точность расчётных формул. Результатом этого является существенное различие между теоретическими расчётами и экспериментальными данными. Вследствие этого для получения нужных характеристик требуется большой дорогостоящий объём регулировочных работ.

Упростить расчёт устройств на двумерных цепях можно при использовании теории электрических цепей [6], но для этого нужно знать цепные матрицы четырёхполюсников, построенных на двумерных планарных компонентах. В настоящее время в явном виде известна лишь матрица сопротивлений четырёхполюсника на основе прямоугольной микрополосковой линии при полностью открытых границах рис. 1 а) (по периметру границы расположена магнитная стенка) [7,8]. В остальных доступных источниках [1-5,8] излагаются общетеоретические положения построения различных матриц без конкретных формул, на основе которых можно осуществлять расчёт различных устройств.

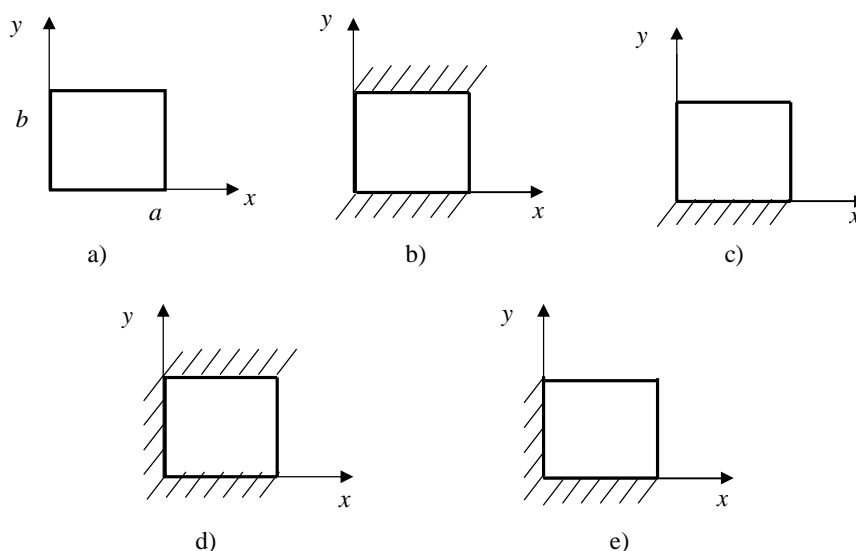


Рис.1. Планарные компоненты с замкнутыми (граница заштрихована) и разомкнутыми границами

Целью статьи является определение матрицы сопротивлений планарных прямоугольных цепей при различных граничных условиях. Перечень рассматриваемых планарных компонентов изображён на рис.1. Размеры сторон цепи равны a и b .

Из результатов работы [7] следует, что элементы матрицы сопротивлений двумерной цепи (считаем, что вдоль оси z поле не меняется) можно найти по функции Грина:

$$Z_{ik} = - \frac{Z_1}{\int_{D_k} J_{ck}(S_i) dS_i} \frac{1}{D_i} \int_{D_i} \int_{D_k} G_1(S_i, S_0) J_{ck}(S_0) dS_0 dS_i, \quad (1)$$

где D_k, D_i - области выводов с номерами k и i ; J_{ck} - плотность поверхностного тока вывода с номером k ; Z_1 - распределённое комплексное сопротивление планарной цепи; $G_1(S_i, S_0)$ - функция Грина, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (δ - функция Дирака, k - волновое число):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1(S, S_0) + \frac{\partial^2 G_1(S, S_0)}{\partial y^2} + k^2 G_1(S, S_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (2)$$

При этом для электрической стенки (замкнутой границе) должно быть выполнено условие $E_z = 0$. Для магнитной стенки (разомкнутой границе) граничное условие имеет следующий вид: $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$.

Для определения функции Грина необходимо найти ортонормированные собственные функции, удовлетворяющие уравнению [9]:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + k^2 f(x, y) = 0. \quad (3)$$

Для упрощения выкладок будем писать f вместо $f(x, y)$. Для решения уравнения (3) воспользуемся методом разделения переменных, то есть

$$f = \Phi_1(x) \Phi_2(y). \quad (4)$$

Учитывая выражение (4), перепишем граничные условия:

а) для разомкнутой границы:

$$\frac{df}{dx} = 0; \quad \frac{df}{dy} = 0; \quad \Phi_1'(x) \Phi_2(y) = 0; \quad \Phi_1'(x) = 0 \text{ при } y = 0, b; \quad (5)$$

$$\Phi_1(x) \Phi_2'(y) = 0; \quad \Phi_2'(y) = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad (6)$$

б) для замкнутой границы:

$$\Phi_1(x) \Phi_2(y) = 0; \quad \Phi_1(x) = 0 \text{ при } y = 0, b; \quad \Phi_2(y) = 0 \text{ при } x = 0, a. \quad (7)$$

Воспользовавшись (4), перепишем выражение (3):

$$\frac{\Phi_1''(x)}{\Phi_1(x)} + \frac{\Phi_2''(y)}{\Phi_2(y)} + k^2 = 0. \quad (8)$$

Допустим, что

$$\frac{\Phi_1''(x)}{\Phi_1(x)} = -k_1^2; \quad \frac{\Phi_2''(y)}{\Phi_2(y)} = -k_2^2. \quad (9)$$

Преобразовывая (9), получим следующие уравнения:

$$\Phi_1''(x) + k_1^2 \Phi_1(x) = 0; \quad (10)$$

$$\Phi_2''(y) + k_2^2 \Phi_2(y) = 0. \quad (11)$$

Решением уравнений (10) и (11) являются функции:

$$\Phi_1(x) = 2C_3 \cos(k_1 x) = C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right); \quad (12)$$

$$\Phi_2(y) = 2jC_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \quad (13)$$

Подставив (12) и (13) в (4), получим:

$$f_{m,n}(x, y) = C_3 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) C_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = C \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \quad (14)$$

Для определения коэффициента C согласно [9] введём условие нормировки:

$$\iint_D f_{m,n}^2(x,y) dx dy = 1. \quad (15)$$

Тогда

$$C = \frac{2}{\sqrt{ab}}; \quad (16)$$

$$f_{m,n}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (17)$$

при $m = 1, 2, \dots, \infty$; $n = 1, 2, \dots, \infty$;

$$f_{0,n}(x,y) = C \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (18)$$

при $m = 0$, $n \geq 1$.

Подставив (18) в (15), получим:

$$f_{0,n}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \quad (19)$$

Так как [7]

$$G(x,y,x_0,y_0) = \sum_{m,n} \frac{f_{m,n}(x,y)f_{m,n}(x_0,y_0)}{k^2 - k_{m,n}^2}, \quad (20)$$

где $k_{m,n}^2 = k_1^2 + k_2^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$,

то конечное выражение для функции Грина будет иметь следующий вид:

$$G(S,S_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4/ab \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_x x_0) \sin(k_y y_0)}{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2/ab \sin(k_y y) \sin(k_y y_0)}{k^2 - k_y^2}, \quad (21)$$

где $k_x = \frac{m\pi}{a}$; $k_y = \frac{n\pi}{b}$.

Для других случаев, изображённых на рис. 1 с-е), определение функции Грина совершается аналогичным образом (в каждом из случаев учитываются свои граничные условия).

Для случая, изображённого на рис.1 с), функция Грина имеет вид:

$$G(S,S_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4/ab \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_x x_0) \sin(k_y y_0)}{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2/ab \sin(k_y y) \sin(k_y y_0)}{k^2 - k_y^2}, \quad (22)$$

где $k_x = \frac{m\pi}{a}$, $k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$.

Для структуры рис.1d), функция Грина равна:

$$G(S,S_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4/ab \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_x x_0) \sin(k_y y_0)}{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}, \quad (23)$$

где $k_x = \frac{(2m+1)\pi}{2a}$, $k_y = \frac{n\pi}{b}$.

Для случая, показанного на рис.1е), имеем следующую формулу:

$$G(S,S_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4/ab \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_x x_0) \sin(k_y y_0)}{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}, \quad (24)$$

где $k_x = \frac{(2m+1)\pi}{2a}$, $k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$.

Пользуясь полученными выражениями для функции Грина прямоугольных плоских цепей, по формуле (1) определим элементы матрицы сопротивлений этих цепей при различном расположении подводящих выводов рис. 2. Распределение плотности тока вдоль подводящих полосок предполагаем равномерным.

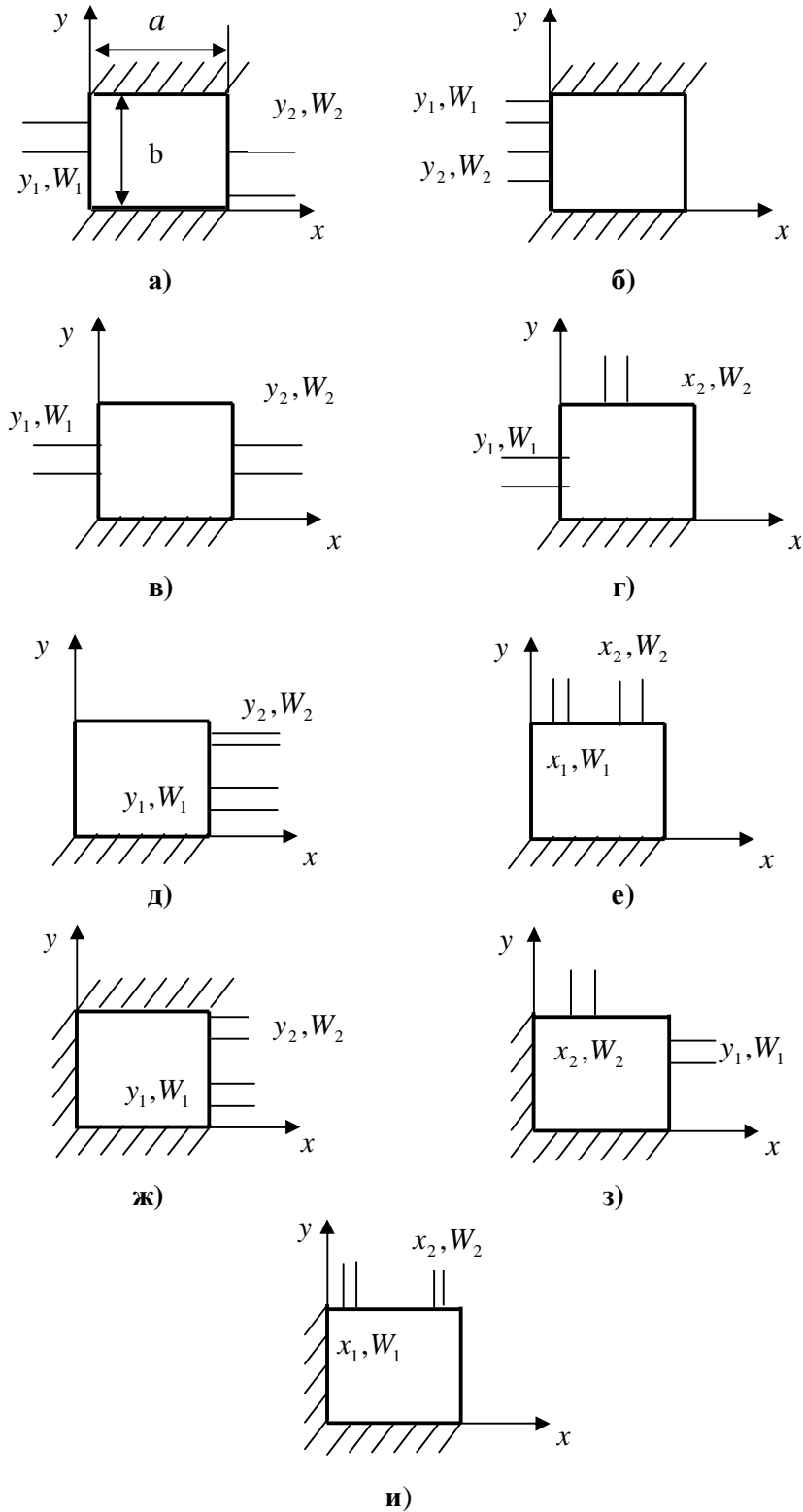


Рис.2. Двухмерные четырёхполюсники

Для цепи рис. 2 а):

$$Z_{11} = \frac{8j\omega\mu d}{W_1^2 ab} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(k_y \frac{W_1}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(\frac{k_y W_1}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad (25)$$

$$Z_{22} = \frac{8j\omega\mu d}{W_2^2 ab} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2(k_y y_2) \sin^2\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_2) \sin^2\left(\frac{k_y W_2}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad (26)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{8j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \times \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} \right],$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (27)$$

Аналогично для случая рис.2 б) получим, что Z_{11} и Z_{22} определяются из выражений (25) и (26). При этом формула для Z_{12} примет вид:

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{8j\omega\mu d}{W_1 W_2} \left[\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \times \sin(k_y y_2) \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \sin(k_y y_2) \times \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2} \right], \quad k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad k_y = \frac{n\pi}{b}. \quad (28)$$

Подставив в (1) формулу (22), получим элементы матрицы сопротивлений для цепи, изображённой на рис.2в):

$$Z_{11} = \frac{8j\omega\mu d}{W_1^2 ab} \left[\sum_{m=1,n=0}^{\infty} \frac{2 \sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(k_y \frac{W_1}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(\frac{k_y W_1}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad (29)$$

$$Z_{22} = \frac{8j\omega\mu d}{W_2^2 ab} \left[\sum_{m=1,n=0}^{\infty} \frac{2 \sin^2(k_y y_2) \sin^2\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_2) \sin^2\left(\frac{k_y W_2}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad (30)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{8j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \sin(k_y y_2) \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{\sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \sin(k_y y_2) \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2}, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b} \right]. \quad (31)$$

Для рис. 2 г) элемент Z_{11} определяется из выражения (29), а элементы Z_{22} и Z_{12} соответственно равны:

$$Z_{22} = \frac{2j\omega\mu d}{W_2^2 ab} \left[\sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{8 \cos^2(k_x x_2) \sin^2\left(k_x \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_2^2}{(k^2 - k_y^2)} \right]; \quad (32)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{4j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n \sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \times \cos(k_x x_2) \sin\left(k_x \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_x k_y} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_2 W_1}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y} \right], \quad k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b}. \quad (33)$$

Для цепи, изображённой на рис. 2 д), имеем:

$$Z_{11} = \frac{8j\omega\mu d}{W_1^2 ab} \left[\sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{2 \sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(k_y \frac{W_1}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(k_y \frac{W_1}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad (34)$$

$$Z_{22} = \frac{8j\omega\mu d}{W_2^2 ab} \left[\sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{2 \sin^2(k_y y_2) \sin^2\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_2) \sin^2\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad (35)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{8j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{2 \sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \times \sin(k_y y_2) \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \sin(k_y y_2) \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_y^2 - k^2) k_y^2}, \quad k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b} \right]. \quad (36)$$

В случае цепи, показанной на рис. 2 е), элементы Z_{11}, Z_{22} определяются соответственно выражениями (29) и (32), а выражение для Z_{12} примет вид:

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{2j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m=1, n=0}^{\infty} \frac{8 \sin(k_x x_1) \sin\left(k_x \frac{W_1}{2}\right) \cos(k_x x_2) \sin\left(k_x \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{W_1 W_2}{k^2 - k_y^2} \right], \quad (37)$$

где $k_x = \frac{m\pi}{a}$; $k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b}$.

Подставив (23) в (1), найдём элементы матрицы сопротивлений для цепи, представленной на рис. 2 ж):

$$Z_{11} = \frac{4j\omega\mu d}{W_1^2 ab} \left[\sum_{m=0, n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(k_y \frac{W_1}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad (39)$$

$$Z_{22} = \frac{4j\omega\mu d}{W_2^2 ab} \left[\sum_{m=0, n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(k_y \frac{W_1}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} \right];$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{4j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m=0, n=1}^{\infty} \frac{\sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \sin(k_y y_2) \sin\left(k_y \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} \right], \quad (40)$$

где $k_x = \frac{(2m+1)\pi}{2a}$; $k_y = \frac{n\pi}{b}$.

Для определения элементов матрицы сопротивлений прямоугольной планарной цепи, изображённой на рис. 2 з), подставим выражение (24) в (1). В результате получим:

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{4j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m=0, n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \sin(k_y y_1) \sin\left(k_y \frac{W_1}{2}\right) \sin(k_x x_2) \sin\left(k_x \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_x k_y} \right]; \quad (41)$$

$$Z_{11} = \frac{4j\omega\mu d}{W_1^2 ab} \left[\sum_{m=0, n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(k_y y_1) \sin^2\left(k_y \frac{W_1}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_y^2} \right]; \quad k_x = \frac{(2m+1)\pi}{2a}; \quad k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b}. \quad (42)$$

$$Z_{22} = \frac{16j\omega\mu d}{W_2^2 ab} \left[\sum_{m=0, n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(k_x x_2) \sin^2\left(k_x \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_x^2} \right], \quad (43)$$

Для цепи рис. 2 и) элемент Z_{22} определяется из выражения (44) а элементы Z_{11} и $Z_{12} = Z_{21}$ соответственно равны:

$$Z_{11} = \frac{16j\omega\mu d}{W_1^2 ab} \left[\sum_{m=0, n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(k_x x_1) \sin^2\left(k_x \frac{W_1}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_x^2} \right]; \quad (44)$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{16j\omega\mu d}{W_1 W_2 ab} \left[\sum_{m=0, n=0}^{\infty} \frac{\sin(k_x x_1) \sin\left(k_x \frac{W_1}{2}\right) \sin(k_x x_2) \sin\left(k_x \frac{W_2}{2}\right)}{(k_x^2 + k_y^2 - k^2) k_x^2} \right], \quad (45)$$

$$k_x = \frac{(2m+1)\pi}{2a}, \quad k_y = \frac{(2n+1)\pi}{2b}.$$

Выводы. Таким образом, с помощью полученных выражений для элементов матрицы сопротивлений, можно осуществлять расчёт различных характеристик двухмерных цепей и их соединений. Следует иметь в виду, что полосковые выводы должны иметь достаточно малую по сравнению с длиной волны ширину, так как только в этом случае справедливо предположение о равномерном распределении плотности тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чон К.-Х. Полосовые характеристики микрополосковых излучателей прямоугольной формы / К.-Х. Чон, А.С. Петров // Электромагнитные волны и электронные системы.-2002.-№1.- С.41-48.
2. Kishihara M., Kawai T. Analysis of E-plane discontinuities in rectangular waveguide based on planar-circuit approach // IEICE Trans. Electron.- 2000.-V.J83-C.-№1-P.45-52.
3. Kang Y.D., Lee T.K. Accurate closed-form Green's function for the analysis of coplanar waveguides // IEEE.- 2000.-V.37TC.-№11.-P.24-31.
4. Kwon J.W., Choi H.S., Chang H.S. Microwave filter design using tapered transmission line theory // IEEE.- 2000.-V.37TC.-no.3.-№3.-P.83-94.
5. Liu P.-G., Liu K.-C., He J.-G. FDTD analysis of an ultra-wide band planar antenna //AES.-2000.-V.28.-№1.- P.86-88.
6. Лихачёв В.Л. Электротехника. В 2-х томах / В.Л. Лихачёв. - М.: Салон-Р, 2001. - 1100 с.
7. Гупта К. Машинное проектирование СВЧ устройств / К. Гупта, Р. Гардж, Р.Чадха. - М.: Радио и связь, 1987 – 429 с.
8. Нефёдов Е.И. Микрополосковые излучающие и резонансные устройства / Е.И. Нефёдов - К.: Техніка, 1990. - 160 с.
9. Булах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теория поля / Е.Г. Булах, В.Н. Шуман - К.: Наукова думка, 1998. - 360 с.

Надійшла:17.01.2013

Рецензент: д.т.н., проф. Толюпа С.В.