УДК 681.7.068

Скубак О.М.

ПОВЕДІНКА ОПТИЧНОГО КАБЕЛЮ МЕРЕЖ ДОСТУПУ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ФАКТОРІВ

В роботі розглянуто оптичні кабелі для мереж доступу. Для даного типу кабелю одержано рівняння рівноваги під дією зовнішніх навантажень.

Ключові слова: доступ, оптичний кабель, світловод, деформований стан.

Вступ. Одним з основних напрямків сучасного науково-технічного прогресу є всебічний розвиток волоконно-оптичних систем та мереж зв'язку, що забезпечують можливість доставки на значні відстані великого обсягу інформації з високою швидкістю. При цьому має місце поділ мереж зв’язку на дві підсистеми – транспортні мережі зв’язку та мережі доступу, що забезпечують під’єднання термінального обладнання абонента до транспортних мереж . Серед типів мереж доступу на цей час найбільш прогресивною вважається мережа FTTH (волокно до дому), яка забезпечує підключення оптичного волокна безпосередньо до домашньої апаратури абонента.

Головною складовою частиною мережі FTTH являються оптичні кабелі (ОК) з осердям стрічкового типу. ОК даного типу складаються з пакету плоских пластикових стрічок, в яких розміщено певне число оптичних волокон.

Кабель з осердям стрічкового типу характеризується правильним розташуванням світловодів в вузлах прямокутної решітки. Осердя закручується по гвинтовій лінії для гнучкості та збереження форми ОК.

Виходячи з цього, ставиться задача на основі нелінійної теорії закручених стержнів отримати рівняння руху для осердя даного типу ОК під дією зовнішніх навантажень.

Векторні та скалярні рівняння руху в зусиллях. Виділимо в деформованому стані елемент стержня AB (рис. 1), обмежений перерізами s^* та $s^* + ds^*$. В силу прийнятих припущень можна вважати їх перпендикулярними до осі стержня.

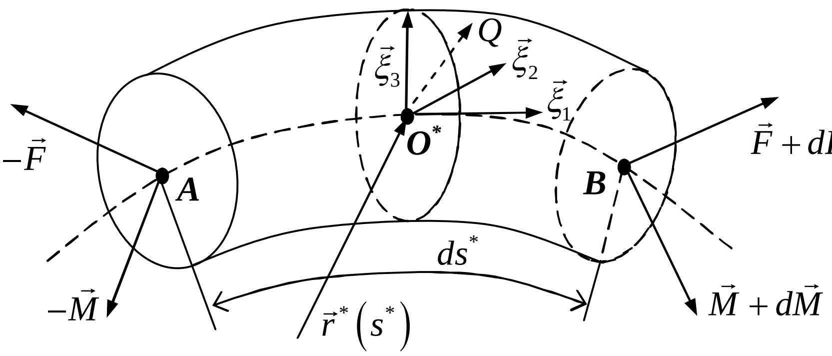

Рис. 1. Елемент стержня в деформованому стані

Як відомо, усі напруження, що діють в виділених перерізах можна звести до головного вектора $\vec{F}$ та головного моменту $\vec{M}$. Нехай

$$\begin{aligned} \vec{F} &= N_1 * \vec{\xi}_1 + Q_2 * \vec{\xi}_2 + Q_3 * \vec{\xi}_3; \\ \vec{M} &= M_1 * \vec{\xi}_1 + M_2 * \vec{\xi}_2 + M_3 * \vec{\xi}_3. \end{aligned} \qquad (1)$$

Крім того до стержня можуть бути прикладені зовнішні зусилля, вектор інтенсивності яких позначимо через $\vec{f}\,*$. Для одержання рівнянь руху застосуємо метод кінетостатики, тобто принцип Даламбера: сума головних векторів та головних моментів сил та інерції зовнішніх сил повинні знаходитись в рівновазі.

Сила інерції дорівнює:

$$\pi R^2 ds * \rho * \frac{\partial r *}{\partial t^2},$$

де $\rho *$ - густина матеріалу стержня в конфігурації C^*;

$r *$ - радіус-вектор центра мас виділеного елемента.

Оскільки $\vec{r}* = \vec{r} + \vec{u}(s)$, то $\frac{\partial^2 \vec{r} *}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$; тут $\vec{u}$ - вектор переміщення точок осі стержня. Вибираємо за точку приведення точку O^* осі стержня в C_t. Головний вектор усіх зусиль згідно принципу Даламбера повинен дорівнювати нулю:

Маємо: $-\vec{F} + \vec{F} + d\vec{F} + f * ds * -\pi R^2 ds * \rho * \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0.$

Оскільки $\rho * ds* = \rho ds,$ то векторне рівняння руху в зусиллях приймають вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial s *} + f* = \pi R^2 \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}.$$

Одержимо скалярні рівняння руху в проекціях на орти базису $(\vec{\tau}; \vec{\upsilon}_1; \vec{\beta}_1)$.

Враховуючі (1), одержимо для випадку малих деформацій: $\frac{\partial \vec{F}}{\partial s^*} = \frac{1}{1+E_s} \frac{\partial \vec{F}}{\partial s} \approx \frac{\partial \vec{F}}{\partial s}$; $\vec{F} = N_1 \vec{\tau} + Q_2 \vec{\upsilon}_1 + Q_3 \vec{\beta}_1$. Запишемо таблицю1 для випадку для малих деформацій та квадратів кутів повороту

Направляючі косинуси для базисів недеформованого та деформованого станів

Таблиця 1

	$\vec{\xi}_1$	$\vec{\xi}_2$	$\vec{\xi}_3$
$\vec{\tau}$	A	a_2	a_3
$\vec{\upsilon}_1$	B	$1+в_2$	$в_3$
$\vec{\beta}_1$	C	$-в_3$	$1+в_2$

З урахуванням таблиці 1 маємо:

$$N_1 = AN_1^* + a_2 Q_2^* + a_3 Q_3^*; Q_2 = BN_1^* + (1+b_2) Q_2^* + b_3 Q_3^*; Q_3 = CN_1^* - b_3 Q_2^* + (1+b_2) Q_3^*.$$

Оскільки $\vec{u} = u_0 \vec{\tau} + v_0 \vec{\upsilon}_1 + w_0 \vec{\beta}_1$, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \vec{\tau} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \vec{\upsilon}_1 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \vec{\beta}_1.$$

Тоді нелінійні скалярні рівняння руху в зусиллях будуть мати вигляд:

$$A \frac{\partial N_1 *}{\partial s} + a_2 \frac{\partial Q_2 *}{\partial s} + a_3 \frac{\partial Q_3 *}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial s} N_1 * + \frac{\partial a_2}{\partial s} Q_2 * +$$
$$+ \frac{\partial a_3}{\partial s} Q_3 * + A f_1 * + a_2 f_2 * + a_3 f_3 * = m \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2};$$

$$B\frac{\partial N_1*}{\partial s}+\left(1+b_2\right)\frac{\partial Q_2*}{\partial s}+b_3\frac{\partial Q_3*}{\partial s}+\frac{\partial B}{\partial s}N_1*+\frac{\partial b_2}{\partial s}Q_2*+$$
$$+\frac{\partial b_3}{\partial s}Q_3*+Bf_1*+\left(1+b_2\right)f_2*+b_3 f_3*=m\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2};$$
$$C\frac{\partial N_1*}{\partial s}-b_3\frac{\partial Q_2*}{\partial s}+\left(1+b_2\right)\frac{\partial Q_3*}{\partial s}+\frac{\partial C}{\partial s}N_1*-\frac{\partial b_3}{\partial s}Q_2*+$$
$$+\frac{\partial b_2}{\partial s}Q_3*+Cf_1*-b_3 f_2*+\left(1+b_2\right)f_3*=m\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.$$

Рівняння руху в моментах. Для виділеного елемента стержня (рис.1) до величин M_1*, M_2*, M_3* застосуємо теорему про зміну кількості руху. Згідно загальної теореми векторна похідна по часу від кількості руху системи дорівнює головному вектору зовнішніх сил прикладених до системи.Розглянемо елемент стержня в деформованій конфігурації C*. За точку приведення вибираємо O*. Обчислимо моменти усіх зусиль відносно цієї точки. Радіус-вектори точок A і B відносно "нерухомої" точки O^* будуть $-\frac{d\vec{r}*}{2}$ та $\frac{d\vec{r}*}{2}$; $m*$ - момент зовнішніх сил на одиницю довжини стержня.

Тоді головний момент усіх зовнішніх сил буде:

$$\vec{M}_0=-\frac{d\vec{r}*}{2}+\left(-\vec{F}\right)+\frac{d\vec{r}*}{2}\times\left(\vec{F}+d\vec{F}\right)-\vec{M}\mp\left(\vec{M}+d\vec{M}\right)+\vec{m}*ds*;$$
$$\vec{M}_0\approx d\vec{r}*\times\vec{F}+d\vec{M}+\vec{m}*ds*.$$

Оскільки $d\vec{r}*=\vec{\xi}_1 ds*$, то остаточно отримуємо:

$$\vec{M}_0=\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial s}+\vec{\xi}_1\times\vec{F}+m*\right)ds*. \tag{2}$$

Для визначення кінетичного моменту поступаємо наступним чином:

Кінематичний момент - це кількісна міра обертальних рухів виділеного елемента. Виділяємо лише обертальні рухи. Для цього в уяві в точку O^* помістимо систему відліку, осі якої вважаємо паралельними $\left(\vec{\tau};\vec{\upsilon}_1;\vec{\beta}_1\right)$. В кінцевому результаті нас будуть цікавити проекції рівнянь руху на осі даного базису.

Розглянемо довільну точку Q виділеного елемента, радіус-вектор якої відносно O^* позначимо через $\vec{\xi}*$. Тоді

$$\vec{\xi}*=0\vec{\xi}_1+\eta*\vec{\xi}_2+\vec{\varsigma}*\vec{\xi}_3, \tag{3}$$

де нуль при $\vec{\xi}_1$ вказує на те, що ця координата є величина першого порядку малості порівняно з $\eta*$ та $\varsigma*$. В околі точки Q виділяємо елемент маси об'ємом $ds*d\eta*d\varsigma*$. Елементарний кінетичний момент буде $\vec{\xi}*\times d\vec{v}_{Q,}$, де $\vec{v}_Q$ - лінійна швидкість точки Q при обертальному русі елемента навколо "нерухомої" точки Q^*; $dm=\rho ds*d\eta*d\varsigma*$.

Якщо $\vec{\omega}$ - миттєва кутова швидкість обертання виділеного елемента навколо точки Q^* то згідно теореми Ейлера $\vec{v}_Q=\vec{\omega}\times\vec{\xi}*$.

Загальний кінетичний момент буде

$$\vec{L} = \int\limits_{(\Delta m^*)} \left[\vec{\xi}^* \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\xi}^*\right)\right] \rho ds^* d\varsigma^* d\varsigma^* \approx \rho \int\limits_{-\frac{ds^*}{2}}^{\frac{ds^*}{2}} dl^* \int\limits_{s^*} \left[\vec{\xi}^* \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\xi}^*\right)\right] ds^*.$$

Остаточно $(ds^* = d\eta^* d\varsigma^*)$

$$\vec{L} = \rho ds^* \int\limits_{s} \left[\vec{\xi}^* \left(\vec{\omega} \times \vec{\xi}^*\right)\right] ds. \tag{4}$$

Покладаємо $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{\xi}_1 + \omega_2 \vec{\xi}_2 + \omega_3 \vec{\xi}_3$, тоді

$$\vec{\xi}^* \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\xi}^*\right) = \vec{\omega}\left(\vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi}^*\right) - \vec{\xi}^* \left(\vec{\xi}^* \cdot \vec{\omega}\right) = \omega_1 \left(\eta^2 + \varsigma^2\right)\vec{\xi}_1 + \\ + \omega_2 \left(\eta^2 + \varsigma^2\right)\vec{\xi}_2 + \omega_3 \left(\eta^2 + \varsigma^2\right)\vec{\xi}_3 - \left(\eta\omega_2 + \varsigma\omega_3\right)\left(\eta\vec{\xi}_2 + \varsigma\vec{\xi}_3\right).$$

Звідси отримуємо:

$$\vec{\xi}^* \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\xi}^*\right) = \omega_1 \left(\eta^2 + \varsigma^2\right)\vec{\xi}_1 + \left(\omega_2 \varsigma^2 + \eta\varsigma\omega_3\right)\vec{\xi}_2 + \left(\omega_3 \eta^2 + \eta\varsigma\omega_2\right)\vec{\xi}. \tag{5}$$

Підставимо (5) в (4) і отримаємо:

$$\vec{L} \approx \rho ds^* \left(\omega_1 I_p \vec{\xi}_1 + \omega_2 I_2 \vec{\xi}_2 + \omega_3 I_3 \vec{\xi}_3\right).$$

Обчислимо ω_1, ω_2, ω_3. Для цього використаємо формули Пуассона:

$$\frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_1; \quad \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t} = \omega_3 \vec{\xi}_2 - \omega_2 \vec{\xi}_3;$$
$$\frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial t} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_2; \quad \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial t} = \omega_1 \vec{\xi}_3 - \omega_3 \vec{\xi}_1;$$
$$\frac{\partial \vec{\xi}_3}{\partial t} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}_3; \quad \frac{\partial \vec{\xi}_3}{\partial t} = \omega_2 \vec{\xi}_1 - \omega_1 \vec{\xi}_2.$$

Звідси

$$\omega_1 = \vec{\xi}_3 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial t} = -\vec{\xi}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_3}{\partial t};$$
$$\omega_2 = \vec{\xi}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_3}{\partial t} = -\vec{\xi}_3 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t};$$
$$\omega_3 = \vec{\xi}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t} = -\vec{\xi}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial t}.$$

З урахуванням таблиці 1 отримаємо: $\omega_1 = a_3 \frac{\partial a_2}{\partial t} + b_3 \frac{\partial b_2}{\partial t} - \left(1 + b_2\right)\frac{\partial b_3}{\partial t}$.

Якщо членом $a_3 \frac{\partial a_2}{\partial t}$ знехтувати як малою величиною в порівнянні з $\frac{\partial b_3}{\partial t}$, отримаємо:

$$\omega_1 = -\left(1 + b_2\right)\frac{\partial b_3}{\partial t} + b_3 \frac{\partial b_2}{\partial t}.$$

З іншого боку $\omega_1 = -\vec{\xi}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_3}{\partial t} = -a_2 \frac{\partial a_3}{\partial t} - \left(1 + b_2\right)\frac{\partial b_3}{\partial t} + b_3 \frac{\partial b_2}{\partial t}$.

Якщо $a_2 \frac{\partial a_3}{\partial t}$ знехтувати в порівнянні з $\frac{\partial b_3}{\partial t}$, маємо:

$$\omega_1 = -(1+b_2)\frac{\partial b_3}{\partial t} + b_3\frac{\partial b_2}{\partial t}.$$

Знайдемо ω_2; з однієї сторони:

$$\omega_2 = -\vec{\xi}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_3}{\partial t} = A\frac{\partial a_3}{\partial t} - B\frac{\partial b_3}{\partial t} + C\frac{\partial b_2}{\partial t},$$

з другої $\omega_2 = -\vec{\xi}_3 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t} = -\left[a_3\frac{\partial A}{\partial t} + b_3\frac{\partial B}{\partial t} + (1+b_2)\frac{\partial C}{\partial t}\right].$

Аналогічно знаходимо компоненту ω_3:

$$\omega_3 = \vec{\xi}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t} = a_2\frac{\partial A}{\partial t} + (1+b_2)\frac{\partial B}{\partial t} - b_3\frac{\partial C}{\partial t}.$$

З урахуванням (2), (3) одержимо векторне рівняння обертального руху довільного елемента розглядуваного закрученого стержня:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(I\vec{\omega}) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} + \vec{\xi}_1 \times \vec{F} + \vec{m}*,$$

де $\rho I\vec{\omega}$ - кінематичний момент на одиницю довжини стержня;

I - момент інерції елемента, який по припущенню має лише наступні діагональні елементи:

$$I_p = \int_s (\eta^2 + \varsigma^2) ds; \quad I_2 = \int_s \varsigma^2 ds; \quad I_3 = \int_s \eta^2 ds. \qquad (6)$$

Спроектуємо рівняння (6) на осі системи координат з базисом $\vec{\tau}, \vec{\upsilon}_1, \vec{\beta}_1$.

Введемо позначення:

$$l_1 = I_p\omega_1 A + I_2\omega_2 a_2 + I_3\omega_3 a_3;$$
$$l_2 = I_p\omega_1 B + I_2\omega_2(1+b_2) + I_3\omega_3 b_3;$$
$$l_3 = I_p\omega_1 C + I_2\omega_2 b_3 + I_3\omega_3(1+b_2).$$

Тоді $\rho I\vec{\omega} = \rho(l_1\vec{\tau} + l_2\vec{\upsilon}_1 + l_3\vec{\beta}_1)$; $\rho\frac{\partial}{\partial t}(I\vec{\omega}) = \rho\frac{\partial l_1}{\partial t}\vec{\tau} + \rho\frac{\partial l_2}{\partial t}\vec{\upsilon}_1 + \rho\frac{\partial l_3}{\partial t}\vec{\beta}_1;$

$$\vec{M} = (AM_1* + a_2M_2* + a_3M_3*)\vec{\tau} + \left[BM_1* + (1+b_2)M_2* + b_3M_3*\right]\vec{\upsilon}_1 +$$
$$+\left[CM_1* - b_3M_2* + (1+b_2)M_3*\right]\vec{\beta}_1.$$

Тим самим

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = (A\frac{\partial M_1*}{\partial s} + a_2\frac{\partial M_2*}{\partial s} + a_3\frac{\partial M_3*}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial s}M_1* + \frac{\partial a_2}{\partial s}M_2* + \frac{\partial a_3}{\partial s}M_3*)\vec{\tau} +$$
$$+[B\frac{\partial M_1*}{\partial s} + (1+b_2)\frac{\partial M_2*}{\partial s} + b_3\frac{\partial M_3*}{\partial s} + \frac{\partial B}{\partial s}M_1* + \frac{\partial b_2}{\partial s}M_2* + \frac{\partial b_3}{\partial s}M_3*]\vec{\upsilon}_1 +$$
$$+[C\frac{\partial M_1*}{\partial s} - b_3\frac{\partial M_2*}{\partial s} + (1+b_2)\frac{\partial M_3*}{\partial s} + \frac{\partial C}{\partial s}M_1* - \frac{\partial b_3}{\partial s}M_2* + \frac{\partial b_2}{\partial s}M_3*]\vec{\beta}_1;$$

$$\vec{\xi}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{\xi}_1 \times \left(N_1 * \vec{\xi}_1 + Q_2 * \vec{\xi}_2 + Q_3 * \vec{\xi}_3 \right) = Q_2 * \vec{\xi}_3 - Q_3 * \vec{\xi} =$$
$$= \left(a_3 Q_2 * - a_2 Q_3 * \right) \vec{\tau} + + \left[b_3 Q_2 * - \left(1 + b_2\right) Q_3 * \right] \vec{\upsilon}_1 + \left[\left(1 + b_2\right) Q_2 * + b_3 Q_3 * \right] \vec{\beta}_{1.}$$

Вважаємо, що зовнішнє розподілене моментне навантаження в базисі C_0 має таке представлення: $\vec{m}* = m_1 * \vec{\xi}_1 + m_2 * \vec{\xi}_2 + m_3 * \vec{\xi}_3$. Тоді

$$\vec{m}* = \left(Am_1 * + a_2 m_2 * + a_3 m_3 * \right) \vec{\tau} + \left[Bm_1 * + \left(1 + b_2\right) m_2 * + b_3 m_3 * \right] \vec{\upsilon}_1 +$$
$$+ \left[Cm_1 * - b_3 m_2 * + \left(1 + b_2\right) m_3 * \right] \vec{\beta}_1.$$

Враховуючі вище сказане, отримаємо три скалярних рівняння руху в моментах:

$$A \frac{\partial M_1 *}{\partial s} + a_2 \frac{\partial M_2 *}{\partial s} + a_3 \frac{\partial M_3 *}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial s} M_1 * + \frac{\partial a_2}{\partial s} M_2 * + \frac{\partial a_3}{\partial s} M_3 * +$$
$$+ a_3 Q_2 * - a_2 Q_3 * + Am_1 * + a_2 m_2 * + a_3 m_3 * = \rho \frac{\partial l_1}{\partial t};$$
$$B \frac{\partial M_1 *}{\partial s} + \left(1 + b_2\right) \frac{\partial M_2 *}{\partial s} + b_3 \frac{\partial M_3 *}{\partial s} + \frac{\partial B}{\partial s} M_1 * + \frac{\partial b_2}{\partial s} M_2 * + \frac{\partial b_3}{\partial s} M_3 * +$$
$$+ b_3 Q_2 * - \left(1 + b_2\right) Q_3 * + Bm_1 * + \left(1 + b_2\right) m_2 * + b_3 m_3 * = \rho \frac{\partial l_2}{\partial t};$$
$$C \frac{\partial M_1 *}{\partial s} - b_3 \frac{\partial M_2 *}{\partial s} + \left(1 + b_2\right) \frac{\partial M_3 *}{\partial s} + \frac{\partial C}{\partial s} M_1 * - \frac{\partial b_3}{\partial s} M_2 * + \frac{\partial b_2}{\partial s} M_3 * +$$
$$+ \left(1 + b_2\right) Q_2 * + b_3 Q_3 * + Cm_1 * - b_3 m_2 * + \left(1 + b_2\right) m_3 * = \rho \frac{\partial l_3}{\partial t};$$

Висновки. Отримані рівняння руху дозволяють визначити переміщення осердя ОК мереж доступу як під дією власної ваги, так і під дією зовнішніх навантажень, оцінити в подальшому їх вплив на оптичні характеристики кабелю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Скубак О.М. Деякі аспекти механічних характеристик кабелів зв’язку, які мають осердя з природною круткою / О.М Скубак // Вісник ДУІКТ. – 2011. – Т.9, №1. – С. 100–106.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. / В.В. Новожилов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. - 320 с.
3. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник в 3-х томах. Том 1. / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – М.: - Машиностроение, 1968. – с. 440-465.
4. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. / А.А. Илюхин. – К.: Наукова думка, 1979. – 216 с.
5. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. Для втузов. В 2-х ч. Ч. I. Статика. / В.А. Светлицкий. – М.: Высш. Шк.., 1987. – 320 с.
6. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. Для втузов. В 2-х ч. Ч. II. Динамика. / В.А. Светлицкий. – М.: Высш. Шк.., 1987. – 304 с.

Надійшла: 18.01.2013

Рецензент: д.т.н., проф. Скрипник Л.В.