Кроме того, использование трёх связанных нерегулярных линий (в нашем случае все три линии одинаковые: их волновое сопротивление изменяется по закону $\widehat{Z}_в(\tau)$ (5)) позволило получить бесконечную область пропускания, то есть вообще отсутствуют паразитные полосы заграждения.

Литература

1. *Теоретические основы электротехники. Справочник по теории электрических цепей. Под ред. Ю.А. Бычкова, В.А. Золотницкого, Э.П. Чернышова.- Питер, 2008.- 868с.*
2. *Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов.- М.: Наука, 1991.- 368 с.*

Рецензент: Щербак Л.Н.
Поступила 14.12.2011

УДК 519.218.82(045)

Андреєв О.В.
Національний авіаційний університет

ТРИПАРАМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ СИГНАЛІВ НА ТЛІ ЗАВАД

Вступ

Вирішення задач екстраполяції випадкових процесів займають важливе місце як в теорії випадкових процесів, так і в практичному використанню цієї теорії в рішеннях практичних задач надійності, діагностиці, контролю якості, обробці сигналів на тлі завад та інших задач в різних галузях науки та техніки. На сьогоднішній день недостатньо вивченими залишаються задачі екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів (ВНС) на тлі стаціонарних та нестаціонарних завад.

В [1], [2] були запропоновані однопараметричний та двохпараметричний методи екстраполяції, недоліком яких є те, що вони дозволяють по двом попереднім значенням процесу, що спостерігається, екстраполювати лише одне, третє значення випадкового нестаціонарного процесу.

Запропонований трипараметричний метод, який використовує ймовірносну вихідну інформацію, отриману в двохпараметричному методі екстраполяції, дозволяє екстраполювати крім третього Y_3^* четверте Y_4^* значення випадкового нестаціонарного процесу на тлі завад.

В роботі подається змістовна трактовка задачі трипараметричної оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завад, вводяться необхідні позначення і виводиться математична постановка задачі, розглядаються особливості вибору моделі для екстрапольованого значення, а також критерії оптимізації. В ролі критерію використовується мінімальна дисперсія похибки екстраполяції. Задача вирішується в проспростішій постановці: є два дискретні спостереження, по їх значенням необхідно передбачити третє та четверте значення.

Постановка задачі

Розглянемо класичну постановку задачі трипараметричного методу оптимальної екстраполяції ВНС на тлі завади, яка має наступний вигляд. Основні позначення використовуються такі ж, як у двопараметричному методі [2].

Задача трипараметричного методу оптимальної екстраполяції розв'язується у такій загальній постановці. Приймаються такі припущення:

1) відомі результати N попередніх спостережень випадкового нестаціонарного процесу $X(t)$ на тлі завади $\xi(t)$;

2) завада вважається випадковим стаціонарним процесом з апріорно відомими математичними сподіваннями і кореляційною функцією:

$$M[\xi(t)] = m_\xi(t); \tag{1}$$

$$K_\xi(\Delta t) = \sigma_\xi^2 \rho_\xi(\Delta t), \tag{2}$$

де: σ_ξ^2 - дисперсія (потужність) завади,

$\rho_\xi(\Delta t)$ - нормована кореляційна функція завади; $\Delta t = t_2 - t_1$.

1) математичне сподівання ВНС $M[X(t)]$, дисперсія $D[X(t)]$ і кореляційна функція $K_X(t_i\ ; t_j)$ вважаються апріорно відомими;

2) екстрапольоване значення ВНП $Y^*(t_3)$ розглядається як n- параметрична функція N значень $Y(t_1)$, $Y(t_N)$ ВНП, що спостерігається $(N \geq n)$;

$$Y^*(t_{N+1}) = Y_{N+1}[Y(t_1), Y(t_2), Y(t_N), \alpha_1, \alpha_n], \tag{3}$$

де: α_1, α_n - параметри оптимізації вибору $Y^*(t_{N+1})$ за певним критерієм.

3) в ролі критерію оптимізації виступає показник точності екстраполяції, який при використанні методу максимальної правдоподібності приводить до такого оптимального вибору параметрів і критеріїв оптимізації:

$$D_{1\min}(\alpha_{1opt}, \alpha_{nopt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} D_1(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} M[Y^*(t_{N+1}) - Y_{N+1}]^2, \tag{4}$$

$$D_{n\min}(\alpha_{1opt}, \alpha_{nopt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} D_n(\alpha_{1opt}, \alpha_{nopt}) = \min_{\alpha_1, \alpha_n} M[Y^*(t_{N+1}) - Y_{N+1}]^2. \tag{5}$$

Операції пошуку максимально точних екстрапольованих значень (4), (5) дозволяють знайти оптимальні значення параметрів α_1, α_n:

$$\alpha_{1opt} = \arg\min_{\alpha_1} D_1(\alpha_1), \tag{6}$$

$$\alpha_{2opt} = \arg\min_{\alpha_2} D_2(\alpha_2), \tag{7}$$

$$\alpha_{nopt} = \arg\min_{\alpha_n} D_n(\alpha_n). \qquad (8)$$

При цих припущеннях загальна постановка задачі оптимальної екстраполяції має наступний вигляд.

Відомі наступні дані:

1. Апріорна інформація щодо ймовірносних характеристик $X(t)$.
2. Апріорна інформація щодо ймовірносних характеристик $\xi(t)$.
3. Аналітична форма процесу

$$Y(t) = Y[X(t), \xi(t)]. \qquad (9)$$

4. Використовуються критерії максимальної точності екстраполяції (4), (5).
5. Використовується класичний метод пошуку координат екстремуму функції n змінних, вирішуючи систему рівнянь n-го порядку.

Необхідно довизначити апріорну інформацію і застосувати класичний метод пошуку координат екстремумів (4), (5) і знайти:

1. Оптимальні значення

$\alpha_{1opt}^{(3)}$, $\alpha_{2opt}^{(3)}$, $\alpha_{3opt}^{(3)}$,

де $^{(3)}$ вказує на те, що ці параметри визначаються для методу трипараметричної екстраполяції.

2. Мінімальні значення парамера $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}, \alpha_{2opt}, \alpha_{3opt})_{min}$.
3. Вибрати критерії ефективності отриманих методів і алгоритмів оптимізації екстрапольованого значення $Y_{opt}^*(t_4)$.
4. Виконати порівняльну оцінку ефективності методів оптимальної екстраполяції ВНС.

Зрозуміло, що задача оптимальної екстраполяції ВНС в умовах, коли спостерігають N_1 значень, прогнозують N_2 значення, в такій загальній постановці є дуже складною, і повинна розв'язуватись за методом математичної індукції. Враховуючі нестаціонарність випадкового процесу нашею задачею є розв'язання задачі трипараметричної оптимальної екстраполяції при $N_1 = 2$, $N_2 = 2$.

Тому в статті вирішується загальна задача оптимальної екстраполяції ВНС, виконується конкретизація вихідних даних для методу трипараметричної оптимальної екстраполяції для випадку $n = 3$, коли використовуються три параметри оптимізації $\alpha_{1opt}^{(3)}$, $\alpha_{2opt}^{(3)}$, $\alpha_{3opt}^{(3)}$ і, відповідно,

$$Y_{4opt}^* = Y_4(Y_1, Y_2, Y_{3opt}^*, \alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}).$$

Трипараметричний метод оптимальної екстраполяції

Трипараметричний метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад передбачає виконання декількох ітерацій, в результаті яких будуть обчислені декілька значень величини $Y_1, \ldots, Y_4$, що спостерігаються.

Перша ітерація. Це по суті двопараметричний метод екстраполяції, який був розглянутий в статті [2], де задача екстраполяції полягає в тому, щоб у найкращий спосіб по значенням Y_1 і Y_2, що спостерігаються, отримати оцінку Y_3^* майбутнього значення Y_3:

$$Y_3^* = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \qquad (10)$$

без процедури нормування $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 1$.

Друга ітерація. По значенням Y_1 і Y_2, що спостерігаються, та отриманій оцінці Y_3^* визначається оцінка Y_4^* майбутнього значення Y_4:

$$Y_4^* = \alpha_1^{(3)} Y_1 + \alpha_2^{(3)} Y_2 + \alpha_3^{(3)} Y_3^* , \qquad (11)$$

де $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ – параметри трипараметричної оптимізації.

Основні характеристики і параметри типараметричного методу наведені на рис 1.

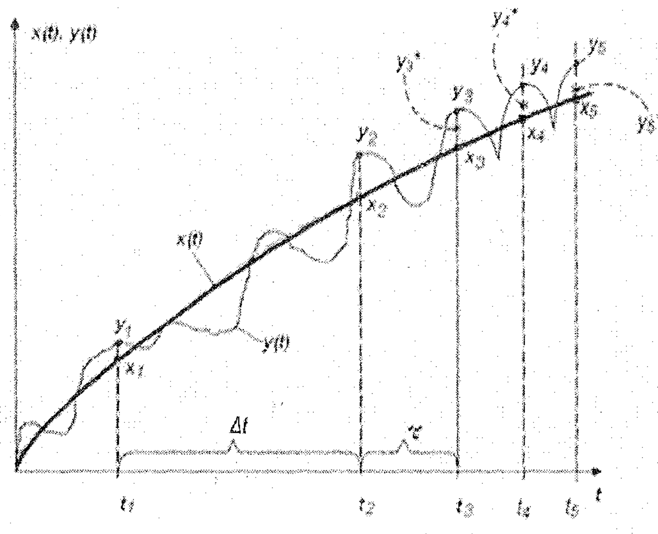

Рисунок 1 – Ілюстрація умов екстраполяції

З першої ітерації ми використовуємо екстрапольоване значення випадкового сигналу Y_3^*, його дисперсію $D[Y_3^*]$, кореляційні функції $k_y(t_1, t_2)$, $k_y(t_1, t_3)$, $k_y(t_2, t_3)$. Решта параметрів, необхідних для трипараметричного методу, буде обчислена нижче.

Вводяться основні позначення випадкових величин [2], що екстраполюються, їх ймовірнісні параметри та набір апріорної інформації про випадковий нестаціонарний сигнал. На основі цієї інформації розроблений метод трипараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад, отримані математичні вирази для оптимальної екстраполяції наступного значення Y_4^* та його ймовірностних параметрів.

Друга ітерація методу використовує припущення (1, 3, 4, 5), описані вище.

Оцінку Y_4^* істинного значення Y_4 в момент часу t_4 розглянемо як лінійну комбінацію попередніх значень, що спостерігаються (11).

Таким чином, для оптимізації оцінки Y_4^* обираємо критерій оптимізації такий же як в [2] і використовуємо $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ як керовані змінні оптимізації.

Використаємо середньоквадратичний критерій методу найменших квадратів у вигляді квадрату відстані між Y_4 та Y_4* у евклідовому просторі:

$$D(\varepsilon) = M[(Y_4 - Y_4^*)^2] . \qquad (12)$$

Для розв'язання задачі оптимізації будемо враховувати співвідношення для характеристик випадкових сигналів, що спостерігаються, зі статті [2].

В задачі оптимізації використовуємо класичний метод знаходження мінімуму функції трьох змінних. Беремо похідні від D_ε по $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$, та прирівнюємо їх до нуля (це є необхідною умовою екстремуму [4]):

$$\frac{\partial D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(3)}}=0\ ;\ \frac{\partial D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(3)}}=0\ ;\ \frac{\partial D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(3)}}=0\ ;$$

враховуючи те, що другі похідні мають такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(3)2}}\ ;\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(3)}\partial \alpha_2^{(3)}}\ ;\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(3)}\partial \alpha_3^{(3)}}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(3)}\partial \alpha_1^{(3)}}\ ;\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(3)}\partial \alpha_3^{(3)}}\ ;\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(3)2}}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(3)}\partial \alpha_1^{(3)}}\ ;\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(3)}\partial \alpha_2^{(3)}}\ ;\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(3)2}},$$

де $D_\varepsilon = D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)})$ записано для скорочення запису, вирішуємо систему рівнянь третього порядку відносно $\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}$, отримаємо $\alpha_{1opt}^{(3)}$, $\alpha_{2opt}^{(3)}$, $\alpha_{3opt}^{(3)}$.

Підставимо у вираз (12) замість Y_4* його значення з (11). Тоді отримаємо:

$$D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)},\alpha_2^{(3)},\alpha_3^{(3)}) = M[(Y_4-\alpha_1^{(3)}Y_1-\alpha_2^{(3)}Y_2+\alpha_3^{(3)}Y_3^*)^2]. \tag{13}$$

Візьмемо похідні від $D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)})$ і прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)},\alpha_2^{(3)},\alpha_3^{(3)})}{\partial \alpha_1} = M\{2(Y_4-\alpha_1^{(3)}Y_1-\alpha_2^{(3)}Y_2-\alpha_3^{(3)}Y_3^*)(-Y_1)\}=0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)},\alpha_2^{(3)},\alpha_3^{(3)})}{\partial \alpha_2} = M\{2(Y_4-\alpha_1^{(3)}Y_1-\alpha_2^{(3)}Y_2-\alpha_3^{(3)}Y_3^*)(-Y_2)\}=0; \tag{15}$$

$$\frac{\partial D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)},\alpha_2^{(3)},\alpha_3^{(3)})}{\partial \alpha_3} = M\{2(Y_4-\alpha_1^{(3)}Y_1-\alpha_2^{(3)}Y_2-\alpha_3^{(3)}Y_3^*)(-Y_3^*)\}=0. \tag{16}$$

Використовуючи властивості математичного сподівання для виразів (14), (15), (16) та перемножуючи складові у фігурних дужках, отримаємо:

$$M[\alpha_1^{(3)}Y_1^2+\alpha_2^{(3)}Y_1Y_2+\alpha_3^{(3)}Y_1Y_3^*-Y_1Y_4]=0; \tag{17}$$

$$M[\alpha_1^{(3)}Y_1Y_2+\alpha_1^{(3)}Y_2^2+\alpha_3^{(3)}Y_2Y_3^*-Y_2Y_4]=0; \tag{18}$$

$$M[\alpha_1^{(3)}Y_1Y_3^*+\alpha_2^{(3)}Y_2Y_3^*+\alpha_3^{(3)}Y_3^{*2}-Y_3^*Y_4]=0. \tag{19}$$

У системі рівнянь (17-19), замінюючи математичні сподівання $M[Y_1^2]$, $M[Y_1Y_2]$, $M[Y_1Y_3^*]$, $M[Y_1Y_4]$, $M[Y_2^2]$, $M[Y_2Y_3^*]$, $M[Y_2Y_4]$, $M[Y_3^{*2}]$, $M[Y_3^*Y_4]$ їх значеннями, отримаємо:

$$\begin{cases} \alpha_1^{(3)}[m_{Y_1}^2 + D_{Y_1}] + \alpha_2^{(3)}[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] + \alpha_3^{(3)}[m_{Y_1}m_{Y_3^*} + k_Y(t_1,t_3)] = m_{Y_1}m_{Y_4} + k_Y(t_1,t_4) \\ \alpha_1^{(3)}[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] + \alpha_2^{(3)}[m_{Y_2}^2 + D_{Y_2}] + \alpha_3^{(3)}[m_{Y_2}m_{Y_3^*} + k_Y(t_2,t_3)] = m_{Y_2}m_{Y_4} + k_Y(t_2,t_4) \\ \alpha_1^{(3)}[m_{Y_1}m_{Y_3^*} + k_Y(t_1,t_3)] + \alpha_2^{(3)}[m_{Y_2}m_{Y_3^*} + k_Y(t_2,t_3)] + \alpha_3^{(3)}[m_{Y_3^*}^2 + D_{Y_3^*}] = m_{Y_3^*}m_{Y_4} + k_Y(t_3,t_4) \ . \end{cases} \quad (20)$$

Систему рівнянь (20) можна записати у матричній формі:

$$\begin{cases} \alpha_1^{(3)}a_{11} + \alpha_2^{(3)}a_{12} + \alpha_3^{(3)}a_{13} = b_1 \\ \alpha_1^{(3)}a_{21} + \alpha_2^{(3)}a_{22} + \alpha_3^{(3)}a_{23} = b_2 \\ \alpha_1^{(3)}a_{31} + \alpha_2^{(3)}a_{32} + \alpha_3^{(3)}a_{33} = b_3 \ , \end{cases} \quad (21)$$

де:

$$a_{11} = m_{Y_1}^2 + D_{Y_1};\ a_{12} = m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2);\ a_{13} = m_{Y_1}m_{Y_3^*} + k_Y(t_1,t_3);$$

$$a_{21} = m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2);\ a_{22} = m_{Y_2}^2 + D_{Y_2};\ a_{23} = m_{Y_2}m_{Y_3^*} + k_Y(t_2,t_3);$$

$$a_{31} = m_{Y_1}m_{Y_3^*} + k_Y(t_1,t_3);\ a_{32} = m_{Y_2}m_{Y_3^*} + k_Y(t_2,t_3);\ a_{33} = m_{Y_3^*}^2 + D_{Y_3^*};$$

$$b_1 = m_{Y_1}m_{Y_4} + k_Y(t_1,t_4);\ b_2 = m_{Y_2}m_{Y_4} + k_Y(t_2,t_4);\ b_3 = m_{Y_3^*}m_{Y_4} + k_Y(t_3,t_4);$$

$m_{Y_3^*} = \alpha_{1opt}^{(2)}m_{Y_1} + \alpha_{2opt}^{(2)}m_{Y_2} = M[Y_3^*]$ - математичне сподівання екстрапольованого значення Y_3* та його дисперсія $D_{Y_3^*}$, які обчислюються за методом двопараметричної екстраполяції у статті [2].

Вирішуючи систему рівнянь (21) відносно $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ по правилу Крамера [4], отримаємо:

$$\alpha_{1opt}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (22)$$

У формулі (22) чисельник дорівнює [4]:

$$b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}b_3 - a_{12}b_2a_{33} + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 \ ; \quad (23)$$

знаменник дорівнює:

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \ . \quad (24)$$

Система рівнянь (22) буде мати рішення, якщо детермінант системи не дорівнює нулю [4]: $D \neq 0$.

$$\alpha_{2opt}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{25}$$

У формулі (25) чисельник дорівнює:

$$a_{11}b_2a_{33} - a_{11}a_{23}b_3 + b_1a_{23}a_{31} - b_1a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}b_2a_{31} \; ; \tag{26}$$

знаменник дорівнює:

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \, . \tag{27}$$

$$\alpha_{3opt}^{(3)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{28}$$

У формулі (28) чисельник дорівнює:

$$a_{11}a_{22}b_3 - a_{11}b_2a_{32} + a_{12}b_2a_{31} - a_{12}a_{21}b_3 + b_1a_{21}a_{32} - b_1a_{22}a_{31} \; ; \tag{29}$$

знаменник дорівнює:

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \, . \tag{30}$$

Тепер розглянемо другі похідні від $D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)})$, отримаємо наступну матрицю:

$$A_{123}(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(3)2}} = M[Y_1^2]; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(3)} \partial \alpha_2^{(3)}} = M[Y_1Y_2]; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_1^{(3)} \partial \alpha_3^{(3)}} = M[Y_1Y_3^*] \\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(3)} \partial \alpha_1^{(3)}} = M[Y_1Y_2]; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(3)2}} = M[Y_2^2]; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_2^{(3)} \partial \alpha_3^{(3)}} = M[Y_2Y_3^*] \\ \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(3)} \partial \alpha_1^{(3)}} = M[Y_1Y_3^*]; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(3)} \partial \alpha_2^{(3)}} = M[Y_2Y_3^*]; & \frac{\partial^2 D_\varepsilon}{\partial \alpha_3^{(3)2}} = M[Y_3^{*2}] \end{vmatrix}, \tag{31}$$

де $D_\varepsilon = D_\varepsilon(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_3^{(3)})$ записано для скорочення запису.

Розглянемо достатню умову екстремуму функції трьох змінних [4].

Квадратична форма від 3-х дійсних змінних α_1, α_2, α де $n = 3$ для матриці других часткових похідних буде мати такий вигляд:

$$x'Ax = (m_{Y_1}^2 + D_{Y_1})\alpha_1^{(3)2} + (m_{Y_2}^2 + D_{Y_2})\alpha_2^{(3)2} + (m_{Y_3^*}^2 + D_{Y_3^*})\alpha_3^{(3)2} + \\ +2[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)]\alpha_1^{(3)}\alpha_2^{(3)} + 2[m_{Y_1}m_{Y_3^*} + k_Y(t_1,t_3)]\alpha_1^{(3)}\alpha_3^{(3)} + \\ +2[m_{Y_2}m_{Y_3^*} + k_Y(t_2,t_3)]\alpha_2^{(3)}\alpha_3^{(3)} > 0; \tag{32}$$

де A – матриця других часткових похідних (32);

$x' = [\alpha_k]$ – матриця – строка;

$x = \{\alpha_i\}$ – матриця – стовпець.

При оптимальному значенні параметрів $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ похибка екстраполяції мінімальна та приймає мінімальне значення:

$$D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(3)}, \alpha_{2opt}^{(3)}, \alpha_{3opt}^{(3)})_{\min} = m_{Y_4}^2 + \sigma_{Y_4}^2 + \alpha_{1opt}^{(3)2}(m_{Y_1}^2 + \sigma_{Y_1}^2) + \alpha_{2opt}^{(3)2}(m_{Y_2}^2 + \sigma_{Y_2}^2) + \\ +\alpha_{3opt}^{(3)2}(m_{Y_3^*}^2 + \sigma_{Y_3^*}^2) - 2\alpha_{1opt}^{(3)}[m_{Y_1}m_{Y_4} + k_Y(t_1,t_4)] - 2\alpha_{2opt}^{(3)}[m_{Y_2}m_{Y_4} + k_Y(t_2,t_4)] - \\ -2\alpha_{3opt}^{(3)}[m_{Y_3^*}m_{Y_4} + k_Y(t_3,t_4)] + 2\alpha_{1opt}^{(3)}\alpha_{2opt}^{(3)}[m_{Y_1}m_{Y_2} + k_Y(t_1,t_2)] + \\ +2\alpha_{1opt}^{(3)}\alpha_{3opt}^{(3)}[m_{Y_1}m_{Y_3^*} + k_Y(t_1,t_3)] + 2\alpha_{2opt}^{(3)}\alpha_{3opt}^{(3)}[m_{Y_2}m_{Y_3^*} + k_Y(t_2,t_3)]. \tag{33}$$

Дисперсію оцінки Y_4^* отримують за наступною формулою:

$$D[Y_4^*] = D[\alpha_{1opt}^{(3)}Y_1 + \alpha_{2opt}^{(3)}Y_2 + \alpha_{3opt}^{(3)}Y_3^*] = \alpha_{1opt}^{(3)2}\sigma_{Y_1}^2 + \alpha_{2opt}^{(3)2}\sigma_{Y_2}^2 + \alpha_{3opt}^{(3)2}\sigma_{Y_3^*}^2 + \\ +2\alpha_{1opt}^{(3)}\alpha_{2opt}^{(3)}k_Y(t_1,t_2) + 2\alpha_{1opt}^{(3)}\alpha_{3opt}^{(3)}k_Y(t_1,t_3) + 2\alpha_{2opt}^{(3)}\alpha_{3opt}^{(3)}k_Y(t_2,t_3) \tag{34}$$

Ефективність трипараметричного методу оптимальної екстраполяції можна оцінювати за формулами:

h_1 – відношення сигнал/шум на виході оптимального екстраполятора:

$$h_1 = \frac{D[Y_4]}{D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(3)}, \alpha_{2opt}^{(3)}, \alpha_{3opt}^{(3)})_{\min}}, \tag{35}$$

де $D[Y_4]$ – дисперсія випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_4, $D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(3)}, \alpha_{2opt}^{(3)}, \alpha_{3opt}^{(3)})_{\min}$ – мінімальна дисперсія похибки екстраполяції.

h_2 – відношення дисперсії випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_4, до дисперсії екстрапольованого значення сигналу $D[Y_4*]$

$$h_2 = \frac{D[Y_4]}{D[Y_4^*]}. \tag{36}$$

h_3 – відношення різниці між дисперсією випадкового сигналу, що буде спостерігатися у момент часу t_4, та дисперсією екстрапольованого сигналу $D[Y_4^*]$ до мінімальної дисперсії похибки екстраполяції:

$$h_3 = \frac{D[Y_4] - D[Y_4^*]}{D_\varepsilon(\alpha_{1opt}^{(3)}, \alpha_{2opt}^{(3)}, \alpha_{3opt}^{(3)})_{\min}}. \qquad (37)$$

Приклад. Для того, щоб перевірити дієздатність та ефективність метода був проведений експеримент методом статистичного імітаційного моделювання (СІМ). В експерименті була поставлена задача – методом СІМ в системі *MathCAD* [5] встановити часові залежності наступних випадкових величин: X_i, Y_i (i = 1…15), оптимального екстрапольованого значення Y_4^*, а також значення α_{1opt}, α_{2opt}, α_{3opt}, $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{min}$, $D[y_4^*]$, h_1, h_2, h_3 для інтервала кореляції завади $\Delta\tau_\xi$ = 0,25с.

Апріорними даними для МСІМ вибрані такі значення величин:
t_1 = 6 с ; t_2 = 10 с – часові відліки вимірювання параметрів X_i і Y_i ; t_3 = 12 с – момент часу для екстраполяції значення Y_3 ;

t_4 = 14 с – момент часу для екстраполяції значення Y_4 ; m_0 = 1 В ; = 0,02 В / $\sqrt{c}$ – математичні очікування параметрів a_0, a_1 незалежних випадкових величин, що мають гаусовський розподіл, а σ_0 = 0,3 В, σ_1 = 0,002 В – їх середньоквадратичні відхилення ; σ_ξ = 0,01 В – середньоквадратичне відхилення завади ; γ = 0,5 – коефіцієнт не лінійності.

За допомогою стандартної функції *MathCAD rnorm* {n, M, y}, де число реалізацій вибране n = 1; M – математичне очікування ; $y = \sigma_i$ – середньоквадратичне відхилення НВС, обчислюються значення коефіцієнтів a_0 і a_1 і п'ятнадцять значень завади ξ.

В табл. показано результати експерименту. На рис. 2 відображені графіки $X(t)$, $Y(t)$ та $Yopt(t3)$ та $Yopt(t4)$, де $Yopt(t3)$ відображає на графіку Y_3^*, а $Yopt(t4)$ - Y_4^* .

На рис 3, 4, 5 відображені графіки залежності D_ε=$f(\alpha_1)$, при α_{2opt}, α_{3opt}=*const*; D_ε=$f(\alpha_2)$, при α_{1opt}, α_{3opt}=*const*; D_ε=$f(\alpha_3)$, при α_{1opt}, α_{2opt}=*const* відповідно.

Таблиця 1. Результати експерименту

X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1
0,763763	0,778081	0,784143	0,789719	0,779228
Y_2	Y_3	Y_4	α_{1opt}	α_{2opt}
0,782672	0,771722	0,770553	0,386778	0,593577
α_{3opt}	Y_3^*	Y_4^*	$D[Y_3^*]$	$D[Y_4^*]$
0,03435	0,789453	0,793082	0,091996	0,131702
h_1	h_2	$D_\varepsilon(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{\min}$		
511,76122	0,684547	0,000176		

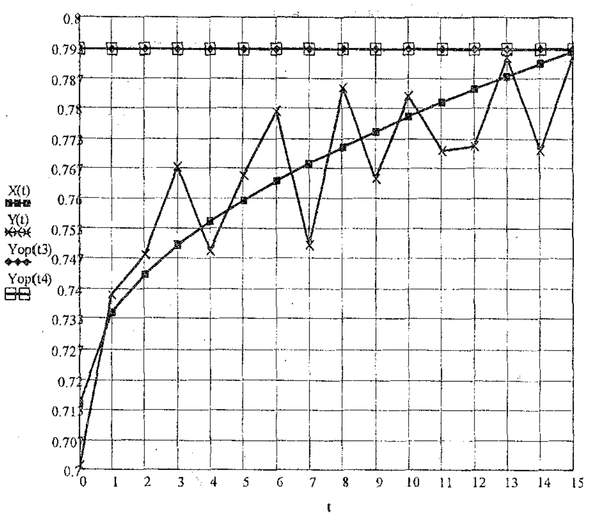

Рисунок 2 – Графік результатів експерименту

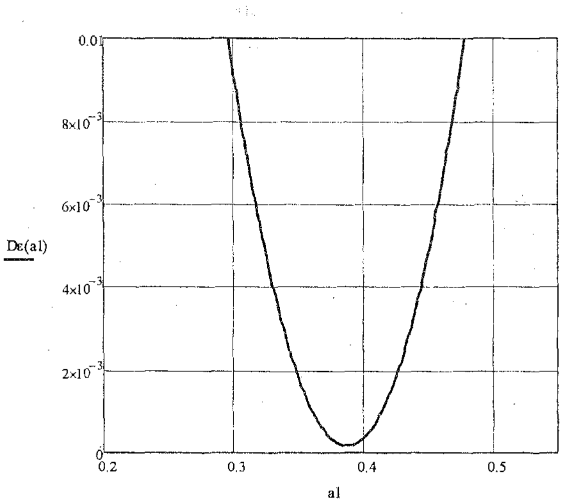

Рисунок 3 – Графік залежності $D_\varepsilon(\alpha_1)$ від параметру α_1

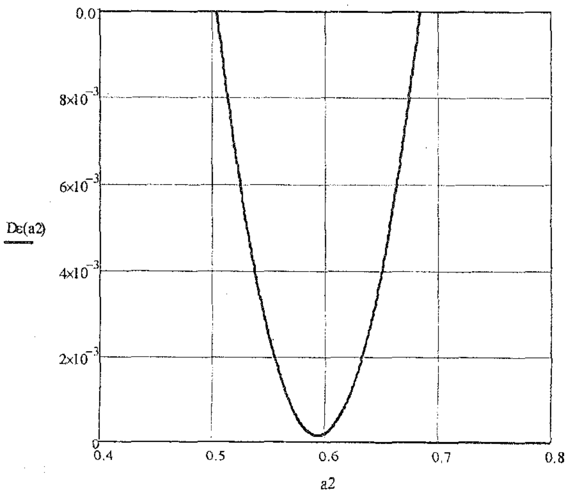

Рисунок 4 – Графік залежності $D_\varepsilon(\alpha_2)$ від параметру α_2

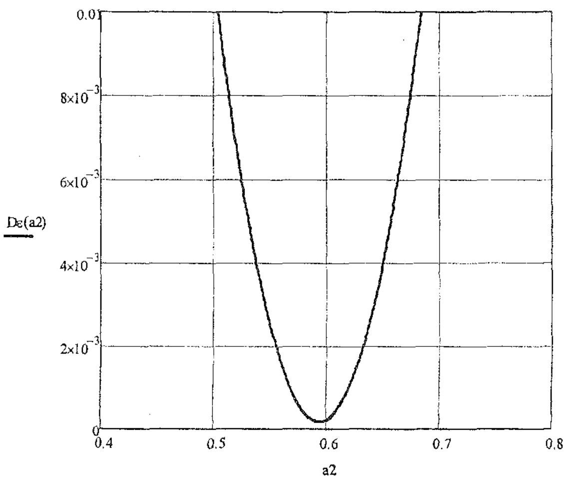

Рисунок 5 – Графік залежності $D_\varepsilon(\alpha_3)$ від параметру α_3

Таблиця 1. Результати експерименту

X_1	X_2	X_3	X_4
0,763763	0,778081	0,784143	0,789719
Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
0,779228	0,782672	0,771722	0,770553
α_{1opt}	α_{2opt}	α_{3opt}	Y_3^*
0,386778	0,593577	0,03435	0,789453
Y_4^*	$D[Y_3^*]$	$D[Y_4^*]$	h_1
0,793082	0,091996	0,131702	511,76122
h_2	$D_\varepsilon(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)_{\min}$		
0,684547	0,000176		

Висновки:

Аналіз результатів експерименту показує працездатність і ефективність способу навіть при низькому відношенню середньоквадратичних значень сигнал / шум.

За результатами експерименту можно зробити наступні висновки:

1. З графіка рис. 2 видно, що в момент екстраполяції t=12с екстрапольоване значення $Y_3^*=Y_{opt}$ розташоване ближче до реального сигналу $X(12)$ ніж $Y(12)$, а результат другої екстраполяції для моменту часу t = 14с $Y_4^* = Y_{opt}$ розташований ближче до реального сигналу $X(14)$ ніж $Y(14)$.
2. Метод СІМ дозволяє отримати двомірні графіки $D_\varepsilon(\alpha_1)$, $D_\varepsilon(\alpha_2)$, $D_\varepsilon(\alpha_3)$ (рис. 3, 4, 5), з яких наглядно видно, що дисперсія похибки екстраполяції є мінімальною при $\alpha=\alpha_{1opt}$, $\alpha=\alpha_{2opt}$, $\alpha=\alpha_{3opt}$.
3. Коефіцієнт h_1 = 511.7 великий (табл. 1.), що свідчить про те, що на виході екстраполятора гарне відношення «сигнал – шум», але він менше, ніж відповідний коефіцієнт для моменту часу t = 12с екстрапольованого значення $Y_3^* = Y_{opt}$ для двопараметричної екстраполяції.
4. Коефіцієнт h_2 = 0.685 (табл. 1.). Це свідчить про те, що метод дозволяє обчислювати не тільки оптимальне прогнозоване значення Y_4^*, але також прогнозувати дисперсію майбутнього (екстрапольованого) значення $D[Y_4^*]$.
5. Дисперсія похибки другої екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{min}$=0.000176 більше ніж дисперсія похибки першої екстраполяції $D_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2,)_{min}$=0.000094 для двохпараметричної екстраполяції.

Таким чином, результати експерименту вказують на те, що трипараметричний метод оптимальної екстраполяції нестаціонарних випадкових сигналів на тлі завад працює ефективно.

Література

1. *Ігнатов В.О., Андрєєв О.В., Андрєєв В.І. Метод оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад // Проблеми інформатизації та управління. Збірник наукових праць. – 2010. №2(30). – С.79-83.*

2. *Ігнатов В.О., Андрєєв О.В., Андрєєв В.І. Метод двопараметричної оптимальної екстраполяції випадкових нестаціонарних сигналів на тлі завад // Проблеми інформатизації та управління. Збірник наукових праць. – 2010. №4(32). – С. 41-46.*

3. *Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. Учебник для вузов. 2-ое изд. Перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.*

4. *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. – 720 с.*

5. *Дьяконов В.П. Энциклопедия MathCAD 2001 и MathCAD 11. – М.: Изд. Солон-пресс, 2004. – 832 с.*

6. *Королюк В.С., Петренко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятности и математической статистике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 640 с.*

Рецензент: Хорошко В.О.
Надійшла 25.11.2011