УДК 519.81 **В.Л. Бурячок, Я.В. Невойт, В.О. Хорошко**

ПРОЦЕДУРА ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ЧАСУ ВПЛИВУ АКТУАЛЬНИХ ЗАГРОЗ НА ІНФОРМАЦІЙНИЙ РЕСУРС

У багатьох важливих діях та операціях, питаннях інформаційної безпеки зустрічаються задачі теорії ігор, пов'язані з вибором часу дій. В цих задачах можливі дії протидіючих сторін можуть задаватися заздалегідь, але час дії встановлюється стратегічними рішеннями сторін. Проаналізовані ситуації показали, що вибір загроз, які мають найбільший час дії на інформаційний ресурс в умовах конфліктів і невизначеності можливий за допомогою застосування теорії ігор з функціями виграшу.

Ключові слова: інформаційний ресурс, загроза, теорія ігор.

Вступ

У багатьох питаннях, що пов’язані з організацією та забезпеченням інформаційної безпеки доволі часто зустрічаються задачі, пов'язані з необхідністю вибору та обґрунтування часу, необхідного для виконання певної дії [1-5]. Прикладом таких задач є задачі дуелі, в яких кожна сторона прагне по можливості затримати свої дії й отримати від цього певний виграш, але водночас може зазнати значних втрат в результаті очікування.

Основна частина

В загальному вигляді функція виграшу або перемоги в подібних задачах може бути записана таким чином:

$$M(x,y) = \begin{matrix} K(x,), & \text{при} & x<y \\ I(x), & \text{при} & x=y \\ L(x,y), & \text{при} & x>y \end{matrix} \tag{1}$$

де на функції K, I та L можуть накладатися різні обмеження, які визначаються конкретними умовами задачі що вирішується.

Позначимо функцію розподілення *P(x)*, що має скачок величини α в нулі, скачок β в одиниці, через $P(x) = (\alpha I_0, p_{ab}(x), \beta I_1)$, де повністю розподілення $p_{ab}(x)$ непереривна на всьому інтервалі $[a,b]\subset[0,1\}$.

Виходячи з викладеного, справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Нехай функція виграшу безперервної ігрової задачі має вигляд:

$$M([x,y) = \begin{matrix} K(x,y), & \text{при } x \le y; \\ L(x,y), & \text{при } x \ge y; \end{matrix} K(x,x) = L(x,x) \tag{2}$$

де функції *K* і*L* задовольняють наступні умови:

в своїх областях визначення функції *K(x,y)* і*L(x,y)* мають безперервні треті часткові похідні;

похідні $K_{xx}(x,y)$ і $K_{yy}(x,y)$ строго негативні для *x*≤*y*а похідні $L_{xx}(x,y)$ і $L_{yy}(x,y)$ строго негативні для *x*≥*y*;

функція *K(x,y)* строго зростає по *y* і строго спадає по *x*а функція *L(x,y)* строго зростає по *x* і строго спадає по *y*.

Тоді обидві сторони мають такі єдині оптимальні змішані стратегії:

$$F(x) = (\alpha I_0, f(x), \beta I_1) \tag{3}$$

$$G(y) = (\gamma I_0, g(y), \delta I_1) \tag{4}$$

Де функції *f(x)* і *g(y)* абсолютно безперервні у всьому інтервалі [0,1] і виходять як єдині рішення пари інтегральних рівнянь

$$\alpha p_1 + \beta p_2 = f + T_f \tag{5}$$

$$\gamma q_1 + \delta p q_2 = g + R_g \tag{6}$$

де
$$T_f = \int_0^y \frac{K_{yy}(x,y)}{K_y(y,y) - L_y(y,y)} \times f(x)dx + \int_y^1 \frac{L_{yy}(x,y)}{K_y(y,y) - L_y(y,y)} \times f(x)dx \tag{7}$$

$$R_g = \int_0^g \frac{L_{xx}(x,y)}{L_x(x,x) - K_x(x,x)} \times g(y)dy + \int_x^1 \frac{L_{xx}(x,y)}{L_x(x,x) - K_x(x,x)} \times g(y)dy \tag{8}$$

$$p_1 = -\frac{K_{yy}(0,y)}{K_y(y,y) - L_y(y,y)}; \qquad p_2 = -\frac{L_{yy}(1,y)}{K_y(y,y) - L_y(y,y)}; \tag{9}$$

$$q_1 = -\frac{L_{xx}(x,0)}{L_x(x,x) - K_x(x,x)}; \qquad q_2 = -\frac{L_{xx}(x,1)}{L_x(x,x) - K_x(x,x)} \tag{10}$$

Постійні $\alpha, \beta,$ іδ визначаються з наступних умов:

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 - \alpha - \beta, \quad (0 \le \alpha, \beta \le 1); \tag{11}$$

$$\int_0^1 g(y)dy = 1 - \gamma - \delta, \quad (0 \le \gamma, \delta \le 1); \tag{12}$$

Таким чином, рішення такої задач, як, наприклад, визначення моменту часу впливу актуальних загроз на інформаційний ресурс, може бути зведено до розв’язання низки інтегральних рівнянь. З цього випливає наступна теорема.

Теорема 2. Нехай функція виграшу безперервної ігрової задачі має вигляд:

$$M(x,y) = \begin{cases} K(x,y), & \text{при} \quad x < y; \\ I(x), & \text{при} \quad x = y; \\ L(x), & \text{при} \quad x > y; \end{cases} \tag{13}$$

де функції K, I іL задовольняють наступні умови:

K (x, y) і*L (x, y)* визначені і мають безперервні другі часткові похідні відповідно на замкнених трикутниках *0≤x≤y≤1*і 0≤y≤x≤1;

значення I(1) розміщено між K(1,1) і L (1,1); значення I(0) розміщено між K(0,0) і L (0,0);

$K_x(x,y)$>0 і $L_x(x,y)$>0 у відповідних замкнутих трикутниках з можливим виключенням $L_x(1,1)$=0; $K_x(x,y)$ <0 і $L_x(x,y)$ <0 у відповідних замкнутих трикутниках з можливим виключенням $K_x(1,1)$=0.

Тоді обидві сторони мають оптимальні стратегії вигляду $F(x) = (\alpha l_0, f_{a1}, \beta I_1)$і $G(y) = (\gamma l_0, g_{a1}, \delta I_1)$, де щільності розподілення f_{a1}, g_{a1} визначаються як рішення наступних інтегральних рівнянь:

$$f_{a1}(t) - \int_a^1 T_{a1}(x,t) \times f_{a1}(x)dx = \alpha p_1(t) + \beta p_2(t); \tag{14}$$

$$g_{a1}(u) - \int_a^1 U_{a1}(u,y) \times g_{a1}(y)dy = \gamma q_1(u) + \delta q_2(u); \tag{15}$$

де

$$T_{a1}(x,t) = \begin{cases} \frac{-K_y(x,t)}{K(t,t) - L(t,t)}, & \text{при } a \le x \le t \le 1, \\ \frac{-L_y(x,t)}{K(t,t) - L(t,t)}, & \text{при } a \le t \le x \le 1; \end{cases} \tag{16}$$

$$U_{a1}(u,y) = \begin{cases} \dfrac{-L_x(u,y)}{K(u,u) - L(u,u)}, & \text{при } a \le y \le u \le 1, \\ \dfrac{-L_y(x,t)}{K(t,t) - L(t,t)}, & \text{при } a \le u \le y \le 1; \end{cases} \tag{17}$$

$$p_1(t) = \frac{-K_y(0,t)}{K(t,t)-L(t,t)}, \quad p_2(t) = \frac{-L_y(1,t)}{K(t,t)-L(t,t)} \tag{18}$$

$$q_1(u) = \frac{-L_x(u,0)}{K(u,u)-L(u,u)}, \quad q_2(u) = \frac{-L_y(u,1)}{K(t,t)-L(t,t)} \tag{19}$$

Зауваження 1. З виразу (13) явно, що якщо $K(1,1)<L(1,1)$, то точка $x=1$, $y=1$ являється для $M(x, y)$ сідловою точкою. Це випливає з формули (3.16) теореми 3.2.

Наслідок 1. У випадку, коли $l(x)=0$ і $K(x,y)=L(x, y)$, то ігрова задача називається симетричною. Симетрична ігрова задача досліджена для випадку, коли функція $M(x,y)$ в області $0 \le x \le y \le 1$ безперервна по обох змінних і має безперервні часткові змінні першого порядку $M_x(x,y)$ і $M_y(x,y)$ такі, що $M_x(x,y) \ge 0$ і $M_y(x,y) \le 0$ при $x \le y$, множина точок для яких $M_x(x,y)=0$ або $M_y(x,y)=0$, не містить ніякого інтервалу вигляду $x=const$, $\beta_1<y<\beta_2$ або $y=const$ $\alpha_1<x<\alpha_2$.

При $K(1,1) \le 0$ оптимальна стратегія єдності матиме вигляд:

$$F(x) = I_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases} \tag{20}$$

При $K(0,1)>0$ оптимальна стратегія матиме вигляд:

$$F(x) = I_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{21}$$

У випадку $K(0,1)<0<K(1,1)$ можливо без обмеження спільності рахувати $K(x, x)>0$ при $0<x\le 1$. Тоді існує однозначно деякий інтервал вигляду $[a,1]$, $0\le a\le 1$, такий, що оптимальна стратегія має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ \alpha & \text{при} \quad 0 < x < a, \\ \alpha + \int_0^x f_{a1}(\xi)d\xi & \text{при} \quad a < x \le 1 \end{cases} \tag{22}$$

де f_{a1} – безперервна позитивна функція; параметр α являється стрибком $F(x)$в нулі, і визначається із умови нормування:

$$\int_a^1 f_{a1}(\xi)d\xi = 1 - \alpha \tag{23}$$

З теореми 2 випливає, що оптимальна стратегія $F(x)$для симетричної ігрової задачі в цьому випадку існує тільки тоді, коли можливо знайти числа a, α $(0 \le a,\ \alpha<1)$ і таку безперервну функцію $f_{a1}(x)$, визначену на $a<x<1$, що

$$\alpha K(0,y) + \int_a^y K(x,y) f_{a1}(x)dx - \int_y^1 K(y,x) f_{a1}(x)dx = 0 \quad (a < y < 1) \tag{24}$$

Зауваження 2. Випадок функції $M(x,y)$ зростаючої по y і спадаючої по x, за допомогою підстановки $\xi = 1 - x, \eta = 1 - y$і зводиться до випадку зростання поx і спадання поy , що розглядається в теоремі 2.

Зауваження 3. Якщо в теоремі 2 замість умови (3) припустити, що $K_y(y,y) - L_y(y,y) > 0$ і $K_x(x,x) - L_x(x,x) > 0$, то можливо показати, що оптимальні стратегії обох сторін матимуть вигляд функцій розподілення $F(x) = (\alpha I_a, f_{ab}(x), \beta I_b)$ і $G(y) = (\gamma I_a, g_{ab}(y), \delta I_b)$, де α, β, γ, $\delta\ge 0$, а функції f_{ab} і $g_{ab}(y)$ виходять у вигляді неймановських рядів по власним функціям сполучених інтегральних рівнянь:

$$f_{ab}(t) - \int_a^b T_{ab}(x,t) \times f_{ab}(x)dx = ap_1(t) + \beta p_2(t) \tag{25}$$

$$g_{ab}(u) - \int_a^b U_{ab}(u,y) \times g_{ab}(y)dy = \gamma q_1(u) + \delta q_2(u) \tag{26}$$

Тепер розглянемо спеціальний клас симетричних ігрових задач, для яких *M (x,y)* не обов'язково безперервна по сукупності змінних в точках (0, 0) і (1,1) і вимагається лише, щоб існували обмеження з врахуванням (7):

$$K(0,0) = \lim_{y\to 0} K(0,y); \qquad K(1,1) \lim_{x\to 1} K(x,1); \tag{27}$$

Будемо рахувати, що

$$K(x,y) = k\frac{x}{y}, \tag{28}$$

де функція *k(u)* безперервно диференціюється в $0 \le u \le 1$, і її похідна $k'(u)$ в цьому інтервалі не змінює знак, причому множина точок *u*, для яких $k'(u) = 0$ не містить ніякого інтервалу.

Неважко побачити, що при $k'(u) \ge 0$ оптимальною стратегією являється $F(x) = I_1$ при $k(1) \le 0$ і $F(x) = I_0$ при $k(u) \ge 0$. Доказ цього факту засновано на принципах пошуку стійких стратегій. Для цього запишемо рівняння

$$E_1(F,0) = E_1(F,0) + \alpha K(0,0) = E_1(F,0) + \alpha K(0) \tag{29}$$

справедливість якого встановлюється за допомогою (29).

Дійсно для $\delta > 0$ маємо

$$E_1(F,\delta) = \int_0^{\delta-0} K(x,\delta)dF(x) - \int_\delta^1 K(\delta,x)dF(x) \tag{30}$$

$$E_1(F,0) = -\int_\delta^1 K(0,x)dF(x) \tag{31}$$

Так , що

$$E_1(F,\delta) - E_1(F,0) \tag{32}$$

$$= \alpha K(0,\delta) + \int_0^{\delta-0} K(x,\delta)dF(x) - \int_\delta^1 K(\delta,x)dF(x) + \int_\delta^1 K(0,x)dF(x);$$

Перший член в правій частині формули (32) $\delta \to 0$ в силу виразу (27) прямує до $\alpha K(0,0)$. Щоб оцінити інтеграли в (32), виберемо з заданого $\varepsilon > 0$ таке η, щоб повна варіація *F(x)* в $[0,\eta]$ була менше $\varepsilon/4K_0$, де $K_0 = Sup[K(x,y)]$. Тоді перший інтеграл менше $\varepsilon/4$, а два останні представимо у вигляді:

$$\int_0^\eta K(0,\delta)dF(x) - \int_0^\eta K(\delta,x)dF(x) + \int_\eta^1 [K(0,x) - K(\delta,x)]dF(x) = J_1 + J_2 + J_3 \tag{33}$$

Звідси видно, що все $|J_i| \le \frac{\varepsilon}{4}, i = 1,2,3$. Цим доказана справедливість виразу (29).

Нехай спочатку $\alpha=0$. З $E_1(F,y) = 0$ при $\alpha<y<1$ випливає, що, $E_1(F,+0) = 0$. При $\alpha>0$ повинно бути $E_1(F,0) = 0$; в силу k (0) <0 це приводить до протиріччя з (3.32). З іншого боку, при $\alpha=0$ маємо:

$$E_1(F,+0) = -\int_0^1 k(0)f(x)dx = -k(0)\int_0^1 f(x)dx = -k(0) > 0 \tag{34}$$

що, очевидно таке неможливо. Якщо далі $\alpha>0$, то з $E_1(F,\alpha) = 0$ і строге спадання функції

$$E_1(F,y) = ak(0) - \int_a^1 k\left(\frac{y}{x}\right) f(x)dx \tag{35}$$

в інтервалі 0<y≤a випливає $E_1(F,+0) > 0$.

Якщо α>0 і $E_1(F,0) = 0$ тоді з виразу (3.36) отримуємо $E_1(F,+0) = \alpha k(0) < 0$, що являється протиріччям. Відповідно *α*> 0 і *α*=0. В цьому випадку рівняння (29) еквівалентно $E_1(F,y) = 0$ в інтервалі (α,1) за умови $E_i^1(F,y) = 0$. Звідси для визначення щільності *f(x)* отримуємо інтегральне рівняння

$$2k(1)f(y) = \int_a^y \frac{x}{y^2} k'\left(\frac{x}{y}\right) f(x)dx + \int_y^1 \frac{f(x)}{x} k'\left(\frac{x}{y}\right) f(x)dx, \quad (a < y < 1) \tag{36}$$

Причому повинна виконуватися умова $\int_a^1 f(x)dx = 1$.

Зауваження 4. Для випадка $k'(u) \leq 0$ можна показати, що оптимальні стратегії мають вигляд $F(x) = \alpha I_0 + \beta I_1$. Таким чином легко перевірити справедливість наступних формул:

$$F(x) = \begin{cases} I_1(x) & \text{при} \quad k(0) < 0, \\ \alpha I_0(x) + (1-\alpha) I_1 x & \text{при} \quad k(0) = 0 \; (0 \leq \alpha \leq 1), \\ I_0 x & \text{при} \quad k(0) > 0 \end{cases} \tag{37}$$

Висновок

Проаналізовані ситуації показали, що вибір загроз, які мають найбільший час дії на інформаційний ресурс в умовах конфліктів і невизначеності, можливий за допомогою застосування теорії ігор з функціями виграшу. Як результат, це дозволить вирішити складну задачу виявлення моменту часу впливу загрози на ІР.

Література

1. Карлин С. Математические методы в теории игр программированиия и экономике. – М.: Мир, 1964.– 835 с.

2. Грищук Р.В. Теоретичні основи моделювання процесів нападу на інформацію методами теорії диференціальних ігор та диференціальних перетворень : монографія / Р. В. Грищук. – Житомир : Рута, 2010. – 280 с.

3. Jianga F. Some issues about outlier detection in rough set theory / F. Jianga, Y. Suib, C. Cao // Expert Systems with Applications: An International Journal. – 2009. – Vol. 36, issue 3, part 1. – P. 4680–4687.

4. Остапенко А. Г. Обнаружение и нейтрализация вторжений в распределенных информационных системах: учеб.пособие / А. Г. Остапенко, М. П. Иванкин, Г. А. Савенков. – Воронеж : Воронежский гос. техн. ун-т, 2013. – 91 с.

5. Малюк А. А. Информационная безопасность: концептуальные и методологические основы защиты информации : учеб.пособие для вузов / А. А. Малюк. – М. : Горячая линия–Телеком, 2004. – 280 с.

Надійшла 10.01.2016 р. Рецензент: д.т.н., проф. Дудикевич В.Б.