УДК 621.39

Ткаченко О.Н.

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ СТАЦИОНАРНОЙ СРЕДНЕЙ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРЕРЫВАНИЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрена задача нахождения границ изменения стационарного среднего времени пребывания требования в системе $M|GJ|1|\infty$ при фиксированной загрузке ρ, а также распределения длины требования, на которых достигаются максимум и минимум этой основной характеристики любой системы обслуживания.

Ключевые слова: система, очередь, нагрузка, длина, время, требование, распределение, пребывание, нижняя оценка, верхняя оценка

Вступление

В системах с бесконечной очередью при нагрузке ρ ≥1 основные характеристики такие, как длина очереди и время пребывания в системе, с течением времени в том или ином смысле стремятся к бесконечности (например, сходимость в самом слабом месте – к бесконечности стремиться математическое ожидание). Факт ухода на бесконечность справедлив и для стационарных характеристик систем при изменяющейся загрузке ρ↑1. В системах M/GI/1/∞ с различными дисциплинами обслуживания (впрочем, как и в системах GI/GI/1/∞) это свойство является отражением узловой теоремы восстановления, примененной к процессам восстановления, образованным последовательными моментами начал периодов занятости. Как следует из соответствующих уравнений для распределения длин периодов занятости, средняя длина периода занятости стремиться к бесконечности при ρ ↑ 1, равна бесконечности при ρ =1, а при ρ > 1 длина периода занятости с ненулевой вероятностью принимает значение бесконечность. В соответствии с этим задача нахождения предельного распределения времени пребывания требования в системе ставиться по разному для случаев докритической (ρ<1), критической (ρ=1) и надкритического (ρ >1) загрузок.

Основная часть

Рассмотрим систему $M|GJ|1|\infty$ с дисциплиной SRPT.

Предположим сначала, что фиксированы только интенсивность входящего потока требований λ и средняя длина требования m. Стационарное среднее время пребывания в системе $V_{(1)}$ (в дальнейшем в статье будем опускать индекс $_{(1)}$ при V) можно при $\rho < 1$ разложить в ряд по степеням λ :

$$V = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots, \tag{1}$$

где

$$\alpha_n = \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\int_0^x y(1 - G(y))dy\left(\int_0^x zdG(z)\right)^n dx \tag{2}$$

При $n = 0$, изменяя порядок интегрирования, имеем:

$$\alpha_0 = m \tag{3}$$

Верхнюю оценку для $\alpha_n (n \geq 1)$ получим, воспользовавшись очевидным неравенством:

$$\alpha_n \leq \left(\int_0^\infty ydG(y)\right)^{n-1} \int_0^\infty \frac{1}{x^2}\int_0^x y\big(1 - G(y)\big)dy \int_0^x zdG(z)\, dx = m^{n-1}\,\alpha_1 \tag{4}$$

Изменяя порядок интегрирования в (2), получаем:

$$\alpha_n = \int_0^\infty y\big(1 - G(y)\big)\left(\int_0^x zdG(z)\right)^n \frac{1}{x^2}dxdy =$$
$$\sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^\infty y\big(1 - G(y)\big) \int_y^\infty\left(\int_0^y zdG(z)\right)^k \left(\int_y^x zdG(z)\right)^{n-k} \frac{1}{x^2}dxdy = \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^\infty y\big(1 -$$
$$-G(y)\big)\left(\int_0^y zdG(z)\right)^k \int_y^\infty\left(\int_y^x zdG(z)\right)^{n-k} \frac{1}{x^2}dxdy$$

Положим

$$\beta_k = \int_y^\infty (\int_y^x zdG(z))^k \frac{dx}{x^2}, \ \ (k = 0,1,\dots).$$

Прежде всего,

$$\beta_0 = \frac{1}{y}, \beta_1 = \int_y^\infty \int_0^\infty \frac{dx}{x^2} zdG(z) = \int_y^\infty dG(z) = \big(1 - G(y)\big). \tag{5}$$

Покажем теперь, что для всех k справедливо неравенство: $\beta_k \geq Y^{k-1}(1 - G(y))^k$. Действительно воспользовавшись индукцией по k, имеем:

$$\beta_k = \int_x^\infty \int_z^\infty \left(\int_y^x udG(u)\right)^{k-1} \frac{dx}{x^2} zdG(z) =$$
$$\int_y^\infty \sum_{i=o}^{k-1} C_{k-1}^i (\int_y^z udG(u))^i \int_z^\infty (\int_z^x udG(u))^{k-1-i} \frac{dx}{x^2} zdG(z) \geq$$
$$\int_y^\infty \sum_{i=o}^{k-1} C_{k-1}^i (\int_y^z udG(u))^i (z\big(1 - G(z)\big))^{k-1-i} dG(z) = \int_y^\infty (\int_y^z udG(u) + (z\big(1 -$$
$$G(z)\big))^{k-1} dG(z) = \int_y^\infty \left(\int_y^z \big(1 - G(u)\big)du + y\big(1 - G(y)\big)\right)^{k-1} dG(z) \geq$$
$$\int_y^\infty (y\big(1 - G(y)\big))^{k-1} dG(z) = y^{k-1}(1 - G(y))^k$$

Теперь получим нижнюю оценку для α_n :

$$\alpha_n \geq \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^\infty y\big(1 - G(y)\big)(\int_0^y zdG(z))^k \left(y\big(1 - G(y)\big)\right)^{n-k} dy = \int_0^\infty y\big(1 -$$
$$G(y)\big)(\int_0^y zdG(z) + y\big(1 - G(y)\big)\Big)^n dy = \int_0^\infty \big(1 - G(y)\big)(\int_0^y \ \big(1 - G(z)\big)dz\Big)^n dy = \frac{m^{n+1}}{n+1}.$$

Кроме того

$$\alpha_1 = \frac{m^2}{2} \tag{6}$$

Пользуясь формулами (1), (3), (4) находим значения нижней $\acute{v}$ и верхней v'' оценок стационарного среднего времени пребывания требования в системе v:

$$v'' = m + \frac{\lambda m^2}{2} + \frac{\lambda^2 m^2}{2} + \cdots = \frac{m(2 - p)}{2(1 - p)},$$
$$v' = m + \frac{\lambda m^2}{2} + \frac{\lambda^2 m^3}{3} + \cdots = -\frac{ln(1 - p)}{\lambda}.$$

Нетрудно показать, что неравенство (4) превращается в строгое равенство тогда и только тогда, когда длина требования принимает с вероятностью единица два значения, одно из которых - 0. Но, поскольку требования нулевой длины при дисциплине SRPT мгновенно покидают систему, их можно не учитывать, и максимальное стационарное среднее время пребывания требования в рассматриваемой системе получается при постоянной длине требования.

Что касается нижней оценки, то из приведенных рассуждений видна справедливость строгого неравенства $\alpha_n > m^{n+1}/(n+1)$при $n \geq 2$. Однако оценка для α_n является точной, как показывает следующий пример:

$$G(x) = \begin{cases} 0; & x < 1 \\ 1 - x^{-\gamma-1}; & x > 1 \ (\gamma > 0). \end{cases} \tag{7}$$

При $\gamma \downarrow 0$ имеет место асимптотическое соотношение:

$$\alpha_n \sim m^{n+1}(n + 1)^{-1}.$$

Таким образом, нижняя оценка $\acute{v}$ также является точной и достигается, например, на последовательности распределений (7) при $\gamma \downarrow 0$.

Интересно отметить, что при малой загрузке p стационарное среднее время пребывания требования в системе $M|GJ|1|\infty$ с дисциплиной SRPT практически не зависит от распределения длины требования. Так, например, при $p = 1/2$, имеем:

$$\frac{\acute{v}}{v''} = 4ln\frac{2}{3} \sim 0{,}91.$$

Рассмотрим задачу нахождения верхней и нижней границ стационарного среднего времени пребывания требования в системе v при фиксированном также втором моменте длины требования $m_{(2)}$. Нетрудно видеть, что верхняя оценка, равная $\frac{m}{2}(2-p)/(1-p)$, как и в задаче без ограничения на $m_{(2)}$, достигается на последовательности распределений, сходящейся к вырожденному $\Delta_m(x)$, поэтому сосредоточим все внимание на нахождении нижней оценки. Для простоты изложения положим $\lambda = 1$. Тогда $p = m$.

Минимальное значение функционала v достигается на некотором распределении $G^*(x)$, которое в дальнейшем будем называть экстремальным и для которого $m = m^*$, но $m^*{}_{(2)} \leq m_{(2)}$. Рассмотрим произвольное распределение $G(x)$ (с ограниченным первым моментом $m < 1$), и пусть x_0 – точка роста и точка непрерывности $G(x)$. Определим при $\Delta \to 0$ понятие Δ - вариации функции $G(x)$ в точке x_0. Пусть $x_1 < x_0$ и $x_2 > x_0$. Если $\Delta > 0$, положим:

$$\tilde{G}(x) = \begin{cases} G(x); & x\bar{\epsilon}\ (x_1, x_2], \\ G(x_1); & x\epsilon\ (x_1, x_2]. \end{cases}$$

Если же $\Delta < 0$, то

$$\tilde{G}(x) = \begin{cases} G(x); & x\bar{\epsilon}\ [x_1, x_2], \\ G(x_2); & x\epsilon\ [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Выбирая при $\Delta \to 0$ значения x_1 и x_2 таким образом, чтобы $x_1 \to x_0$ и $x_2 \to x_0$ и $\int_0^\infty (G(x) - \tilde{G}(x))\,dx = \Delta$, будем называть $\tilde{G}(x)$ Δ - вариацией функции $G(x)$ в точке x_0.

Аналогично вводится понятие Δ - вариации и в точках разрыва $G(x)$ для разрывных функций распределения $G(x)$.

Приращение $\Delta v = v^\Delta - v$, где v^Δ - значение функционала v после подстановки Δ - вариацией функции $G(x)$:

$$\Delta v = \Delta\left[\int_{x_0}^{\infty}\frac{\int_0^\infty y(1-G(y))dy}{x^2(1-p_x)^2}dx + x_0\int_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{x^2(1-p_x)^2} - \frac{\int_0^\infty y(1-G(y))dy}{x_0(1-p_{x_0})^2}\right] + 0(\Delta) \qquad (8)$$

Здесь $p_x = \int_0^x ydG(y)$. Выражение в квадратных скобках формулы (8) будем также называть Δ - производной функционала v в точке x_0 и обозначать через $\acute{v}^\Delta(x_0)$.

Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ – произвольные точки роста $G(x)$. Обозначим через $\tilde{G}(x)$ функцию, являющуюся Δ_1 – вариацией $G(x)$ в точке x_1, Δ_2 – вариацией $G(x)$ в точке x_2, Δ_3 – вариацией $G(x)$ в точке x_3, причем Δ_1, Δ_2 и Δ_3 выбраны таким образом, чтобы у $G(x)$ и $\tilde{G}(x)$ совпадали также первые два момента, т.е.

$$\Delta_2 = \Delta_1\frac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2} + 0(\Delta_1), \qquad (9)$$

$$\Delta_3 = \Delta_1\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} + 0(\Delta_1), \qquad (10)$$

Соответствующее превращение функционала v обозначим через Δv. Ясно, что $\Delta v = \Delta_1 v + \Delta_2 v + \Delta_3 v + 0(\Delta_1)$.

Пусть $G(x)$ – экстремальное распределение. Покажем, что функция $G(x)$ непрерывна всюду, за исключением, быть может точки 0. Действительно, пусть x_0 точка скачка $G(x)$.

Полагая $\Delta_1 < 0$, возьмем $x_1 = x_0 - 0$, $x_2 = x_0 + 0$ и произвольную точку роста x_3. Тогда из (9) и (10) следует:

$$\Delta_2 = -\Delta_1 + 0(\Delta_1), \qquad \Delta_3 = 0(\Delta_1)\,.$$

Поэтому из (8) имеем:

$$\Delta v = \frac{\Delta_1}{x_0}\left[\frac{1}{(1-p_{x_0}+0)^2} - \frac{1}{(1-p_{x_0}-0)^2}\right]\int_0^{x_0} y\big(1-G(y)\big)\,dy + 0(\Delta_1),$$

откуда нетрудно вывести, что $G(x)$ не может являться экстремальным распределением.

Покажем, что экстремальное распределение $G(x)$ не может иметь также интегралов постоянства, за исключением, быть может случаев $G(x) = 0$ при $x\epsilon[0, a]$ и $G(x) = 1$ при $x\epsilon[\delta, \infty]$. Действительно, пусть $G(x) = G$ при $x_1\epsilon[x_1, x_2]$. Пусть x_3 – произвольная точка роста $G(x)$. Предположим далее, что $G(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда, как следует из (8), существует производная по x функции $\acute{v}^{\Delta}(x)$ в точке x_0, задаваемая формулой:

$$\acute{v}_{\Delta x}{}''(x_0) = 2\int_{x_0}^{\infty}\frac{y\big(1-G(y)\big)dG(y)}{(1-p_y)^3} \tag{11}$$

Поскольку $\acute{G}(x) = 0$ на интервале (x_1, x_2), то то на интервале $[x_1, x_2]$ имеем:

$$\acute{v}_{\Delta}(x) = \alpha x + \beta,$$

где

$$\alpha = 2\int_{x_0}^{\infty}\frac{y\big(1-G(y)\big)dG(y)}{(1-p_y)^3}$$

Далее, интегрируя (11) на интервале $[x_1, x_2]$, получаем:

$$\acute{v}_{\Delta}(x_3) = 2\int_{x_2}^{x_3}\int_{x}^{\infty}\frac{y\big(1-G(y)\big)dG(y)}{(1-p_y)^3}dx - 2\int_{x_2}^{x_3}\frac{\int_0^x\big(1-G(y)\big)dy}{(1-p_x)^3}dG(x) + \acute{v}_{\Delta}(x_2) < \alpha(x_3 - x_2) + \alpha x_2 + \beta = \alpha x_3 + \beta \tag{12}$$

Положим теперь $\Delta_1 > 0$ и проведем Δ - вариацию функции $G(x)$ в точках x_1, x_2, x_3. $\Delta_3 > 0$. Отсюда и из (12) находим:

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{3}\Delta_i\,(\alpha x_i + \beta) + \big(\acute{v}_{\Delta}(x_3) - (\alpha x_3 + \beta)\big)\Delta_3 + 0(\Delta_1) = \big(\acute{v}_{\Delta}(x_3) - (\alpha x_3 + \beta)\big)\Delta_3 + 0(\Delta_1) < 0,$$

что противоречит условию экстремальности $G(x)$.

Представим уравнение, которому удовлетворяет экстремальное распределение $G(x)$:

$$\acute{v}_{\Delta}(x) = C_x^* + B,$$

или, обозначая через $g(x)$ плотность распределения $G(x)$ (эта плотность, как нетрудно видеть, существует и непрерывна) и дифференцируя по x,

$$g(x)\frac{\int_0^x\big(1-G(y)\big)dy}{(1-p_x)^3} + \int_0^x\frac{y\big(1-G(y)\big)g(y)dy}{(1-p_y)^3} = C \tag{13}$$

Начальные условия в уравнении (13), могут быть двух типов, а именно:

$$G(+0) = G \geq 0, \tag{14}$$

или

$$G(x) = 0;\quad 0 < x < \alpha \qquad (\alpha < p) \tag{15}$$

Дифференцируя (13), увидим, что $g(x) < 0$, т.е. $G(x)$ – является выпуклой (вверх) функцией от x при $G(x) > 0$. Отсюда следует, что условие (14) невозможно. Действительно, если при выполнении (14) было бы $C \leq 0$, то $g(x)$ должна быть меньше нуля. Если же $C > 0$, то при $x \downarrow 0$ было бы $g(x)\sim 1/(2x)^2$, что также недопустимо. Отметим, что при выполнении условия (15) и уравнения (13) постоянная C больше нуля.

Покажем, что любое (интересующее нас, т.е. являющееся функцией распределения) решение уравнение (13) является функцией распределения ограниченной случайной величины. Действительно, пусть это не так и $G(x) < 1$ при всех x. Тогда уравнение (13) можно переписать в виде:

$$g(x)\frac{\int_0^x \ (1-G(y))dy}{(1-p_x)^3} = \int_x^\infty \frac{y(1-G(y))g(y)dy}{(1-p_y)^3} \le \frac{1-G(x)}{(1-p_y)^3}\left[x(1-G(x)) + \int_x^\infty (1-G(y))dy\right].$$

Поскольку рассматриваем только решения с конечным вторым моментом, то $y^2(1-G(y)) \to 0$ при$y \to \infty$, и следовательно, для достаточно больших x

$$g(x)(1-G(x))^{-1} \le \varepsilon x^{-1}.$$

Интегрируя последнее неравенство от χ до x, получаем:

$$-\ln(1-G(x)) \le A + \varepsilon \ln(x),$$
$$1 - G(x) \ge Bx^{-\varepsilon}.$$

Но полученное неравенство при достаточно малом ε, вообще, противоречит даже условию существования первого момента.

Еще одно полезное свойство решений уравнения (13) заключается в том, что две различные интегральные кривые уравнения (13), начинающиеся в одной и той же точке $(a, 0)$, не могут пересекаться. Действительно, пусть $G^{(1)}(x)$ и $G^{(2)}(x)$ – два решения уравнения (13) с одним и тем же начальным условием, причем $C^{(1)} > C^{(2)}$. Пусть $G^{(1)}(x) > G^{(2)}(x)$ при $x\epsilon(a, x_0)$ и $G^{(1)}(x_0) = G^{(2)}(x_0)$. Полагая

$$b_i = \frac{\int_0^{x_0} \ \left(1-G^{(i)}(y)\right)dy}{\left(1-p^i{}_{x_0}\right)^3}, d_i = \int_0^{x_0} \frac{y\left(1-G^{(i)}(y)\right)g^{(i)}(y)dy}{\left(1-p^i{}_{x_0}\right)^3},$$

перепишем уравнение (13) в точке x_0 в виде:

$$g^{(i)}(x_0)b_i = C^{(i)} + d_i \qquad (16)$$

Нетрудно видеть, что

$$1 - p^{(1)}{}_{x_0} > 1 - p^{(2)}{}_{x_0}, \int_0^{x_0} \ \left(1-G^{(1)}(y)\right)dy < \int_0^{x_0} \ \left(1-G^{(2)}(y)\right)dy.$$

Значит,

$$b_1 < b_2 \qquad (17)$$

Определим функцию $z_i(p)$ как решение уравнения $p = p^{(i)}(z)$. Тогда

$$d_i = \int_0^{p^{(i)}{}_{x_0}} \frac{1-G^{(i)}(z_i(p))}{(1-p)^3}dp.$$

Можно показать, что

$$1 - G^{(1)}(z_1(p)) < 1 - G^{(2)}(z_2(p)).$$

Отсюда имеем:

$$d_1 < d_2 \qquad (18)$$

Окончательно получаем $g^{(1)}(x_0) > g^{(2)}(x_0)$. Но это противоречит предположению, что $G^{(1)}(x) > G^{(2)}(x)$ при $x < x_0$.

Дальнейшее исследование уравнения (13) можно провести численными методами. Численное интегрирование уравнения (13) не вызывает никаких затруднений, некоторые сложности появляются при выделении из всех (допустимых) решений уравнения (13) экстремальных распределений $G(x)$. Здесь, справедлива гипотеза о том, что любое (допустимое) решение уравнения (13) определяет некоторое экстремальное распределение $G(x)$.

Вывод

Определены значения нижней $\acute{v}$ и верхней v'' оценок стационарного среднего времени пребывания требования в системе v.

Показано, что при малой загрузке p стационарное среднее время пребывания требования в системе $M|GJ|1|\infty$ с дисциплиной SRPT практически не зависит от распределения длины требования.

Список использованных источников:

1. Толубко В.Б. Методи оптимізації / В.Б. Толубко, Л.Н. Беркман. – Київ: ДУТ, 2016. – 442 с.

2. Стеклов В. К. Телекоммуникационные сети / В. К. Стеклов, Л. Н. Беркман. – Київ: Техніка, 2000. – 392 с.

3. Лихтциндер Б.Я. Интеллектуальные сети связи. / Б. Я. Лихтциндер, М. А. Кузякин, А. В. Росляков, С. М. Фомичев. – Москва: Эко-Трендз, 2000. – 205 с.

Надійшла: 13.05.2018 Рецензент: к.т.н. Довбешко С.В.