УДК 519.677 **Ю.Ю. Гончаренко**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

В работе показано, что устранение погрешностей неопределенности в некорректно поставленной задаче возможно путем ограничения вариаций функций, определяющих эту задачу, что позволяет сократить число объектов, удовлетворяющих классификационным признакам, при их идентификации.

Ключевые слова: неопределенность, оценка, погрешность, некорректно поставленная задача.

Введение

Сегодня решение многих задач в науке и технике, и фундаментальных, и прикладных, производится в условиях неопределенности, которая обусловлена отсутствием некоторых достоверных данных об объекте исследований. Например, при решении задач продления ресурса сложных объектов и систем известны только те из основных характеристик, которые можно измерить [1]. Планируя мероприятия по защите окружающей природной среды, необходимо оценить риски воздействия антропогенных факторов, что в большинстве случаев проводится на основе гипотетических допущений [2]. Более конкретно формулируются задачи в экономике [3], физике [4], но при их решении также возникают ситуации, которые следует отнести к разряду задач, в постановке которых отсутствует полный набор данных. Применительно к задачам съема речевой информации [5] можно отметить ряд факторов, вносящих элемент неопределенности, а именно: факторы идентификации источников звука, факторы среды, определяющие распространение звуковых волн, факторы обработки и пеленгования сигналов и т.д.

Обобщая вышесказанное и относя перечисленные задачи к категории некорректно поставленных, возникает очевидный вопрос, связанный с оценкой точности их решения, т.е с оценкой его погрешностей.

Попытки поиска решения такого типа задач в общем виде описаны в трудах Наттера [6] и Льюиса [7]. Тем не менее получение общего решения подобного класса задач до сих пор является актуальной научной проблемой.

Постановка цели и задач научного исследования

Целью данной работы является получение обобщенного решения класса некорректно поставленных задач в виде математической модели оценки погрешностей их решения. Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи: сформулировать условия решения задачи и разработать соответствующую математическую модель.

Постановка задачи

Оценку погрешностей некорректно поставленных задач будем проводить применительно к операторам $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{P}$, удовлетворяющим условию (4.30) при $\alpha = \dfrac{n-1}{2}$ и $\alpha = \dfrac{1}{2}$ соответственно. Выберем пространство Соболева восстанавливаемых функций f или хотя бы изображения, задаваемые почти всюду гладкими функциями, может быть, имеющими скачки на гладких $(n-1)$-мерных многообразиях. Рассмотрим характеристическую функцию f множества Ω^n, тогда

$$\hat{f}(\xi) = |\xi|^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(|\xi|), \tag{1}$$

где $J_{\frac{n}{2}}$ – функция Бесселя, при этом

$$\|f\|^2_{H^\beta} = \int_{R^n}(1+|\xi|^2)^\beta|\xi|^{-n}J^2_{\frac{n}{2}}(|\xi|)d\xi = |S^{n-1}|\int_0^\infty(1+\sigma^2)^\beta\sigma^{-1}J^2_{\frac{n}{2}}(\sigma)d\sigma . \qquad (2)$$

Интеграл (2) конечен при условии $\beta < \frac{1}{2}$, при котором и $f \in H^\beta$, значит функции, задающие простые изображения такого вида, принадлежат пространствам Соболева порядка $\frac{1}{2}$.

Действительно, в рамках изотропной экспоненциальной модели изображение рассматривается как совокупность $(f(x))_{x\in R^2}$ случайных величин, для которой

$$E(f(x)-\bar{f}(x))(f(x')-\bar{f}(x')) = \sigma(x)\sigma(x')e^{-\lambda|x-x'|}, \qquad (3)$$

где $\bar{f} = Ef$. Если функция $\sigma \in C_0^\infty$, то размер изображения конечный. Для вещественной функции f найдем $E\left|(f-\bar{f})^\wedge\right|^2$, при этом получим

$$\left|\left(f-\bar{f}\right)^\wedge(\xi)\right|^2 = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\int_{R^n}e^{-i(x-x')\cdot\xi}(f-\bar{f})(x)(f-\bar{f})(x')dxdx' . \qquad (4)$$

В соответствии с (3),

$$E\left|\left(f-\bar{f}\right)^\wedge(\xi)\right|^2 = (2\pi)^{-n}\int_{R^n}\int_{R^n}e^{-i(x-x')\cdot\xi}\sigma(x)\sigma(x')e^{-\lambda|x-x'|}dxdx' . \qquad (5)$$

Обозначим $k(x) = e^{-\lambda|x|}$ и получим в результате преобразований, что

$$E\left|\left(f-\bar{f}\right)^\wedge\right|^2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\hat{k}_*|\hat{\sigma}|^2, \qquad (6)$$

где с учетом замены $x = r\theta$, $\xi = \rho\cdot\omega$

$$\hat{k}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}e^{-ix\cdot\xi-\lambda|x|}dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\infty r^{n-1}e^{-\lambda r}\int_{S^{n-1}}e^{-ir\rho\theta\cdot\omega}dr , \qquad (7)$$

тогда интеграл по S^{n-1} при $l = 0$ примет вид:

$$\int_{S^{n-1}}e^{-ir\rho\theta\cdot\omega}d\omega = (2\pi)^{\frac{n}{2}}(r\rho)^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(r\rho) , \qquad (8)$$

откуда

$$\hat{k}(\rho\omega) = \rho^{\frac{2-n}{2}}\int_0^\infty r^{\frac{n}{2}}e^{-\lambda r}J_{\frac{n}{2}-1}(r\rho)dr . \qquad (9)$$

При $v = \frac{n}{2}-1$ получим

$$\hat{k}(\rho\omega) = c_1(n)\lambda(\lambda^2+\rho^2)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (10)$$

где $c_1(n)$ – некоторая постоянная. С учетом (6),

$$\begin{aligned} E\|f-\bar{f}\|^2_{H^\beta} &= E\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^\beta\left|\left(f-\bar{f}\right)^\wedge(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^\beta E\left|\left(f-\bar{f}\right)^\wedge(\xi)\right|^2 d\xi = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^2}\left(1+|\xi|^2\right)^\beta\left(\hat{k}*|\hat{\sigma}|^2\right)(\xi)d\xi = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}|\hat{\sigma}(\eta)|^2\int_{R^n}\left(1+|\xi|^2\right)^\beta\hat{k}(\xi-\eta)d\xi d\eta \end{aligned} \qquad (11)$$

В соответствии с (10) полученная величина конечна только при условии, если $\beta < \frac{1}{2}$.

Оценка погрешности некорректно поставленной задачи

Плотность изображения f представляет собой функцию из пространства Соболева $H_0^\beta(\Omega^n)$ при β, близком к $\frac{1}{2}$. Так как ранее всюду допускалась бесконечная дифференцируемость f, примем $f \in \tilde{N}_0^\infty(\Omega^n)$ и

$$\|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \le \rho, \tag{12}$$

где β близко к $\frac{1}{2}$, а ρ не слишком велико. Рассматривать как наибольшие возможные погрешности восстановления f по исходным данным, измеренным с ошибкой ε, при выполнении условий (12):

$$d^{\mathsf{R}}(\varepsilon,\rho) = \sup\left\{\|f\|_{L_2(\Omega^n)} : \|\mathsf{R}f\|_{L_2(Z)} \le \varepsilon, \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \le \rho\right\}, \tag{13}$$

$$d^{\mathsf{P}}(\varepsilon,\rho) = \sup\left\{\|f\|_{L_2(\Omega^n)} : \|\mathsf{P}f\|_{L_2(T)} \le \varepsilon, \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \le \rho\right\}, \tag{14}$$

тогда найдется такая постоянная $c(\beta,n)$, что

$$d^{\mathsf{R}}(\varepsilon,\rho) \le c(\beta,n)\varepsilon^{\frac{2\beta}{n-1+2\beta}}\rho^{\frac{n-1}{n-1+2\beta}}, \tag{15}$$

$$d^{\mathsf{P}}(\varepsilon,\rho) \le c(\beta,n)\varepsilon^{\frac{2\beta}{1+2\beta}}\rho^{\frac{1}{1+2\beta}}. \tag{16}$$

Полученные оценки справедливы в частности при $n=2$. Исследуем значения β, близкие к $\frac{1}{2}$, для чего для простоты возьмем $\beta = \frac{1}{2}$, получим

$$d^{\mathsf{R}}(\varepsilon,\rho) \le c(n)\varepsilon^{\frac{1}{n}}\rho^{1-\frac{1}{n}}, \tag{17}$$

$$d^{\mathsf{P}}(\varepsilon,\rho) \le c(n)\varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Обе задачи восстановления (17) и (18) являются умеренно некорректными (для $n = 2,\ 3$), при этом для R степень некорректности зависит от числа измерений, а для P – не зависит. Если ошибка измерения исходных данных ε, то погрешность восстановления по линейным интегралам будет порядка $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, по плоскостным интегралам – $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

Кроме неточности измерений, на ошибку влияет дискретность выборки. Допустим, что значения функции $\mathsf{R}f$ известны только для конечного числа направлений $\theta_1,\ldots,\theta_\rho$ и вещественных чисел $s_1,\ldots,s_q$. Пусть точки (θ_j, s_l) равномерно покрывают $S^{n-1}\times[-1,+1]$ в смысле, что

$$\sup_{-1\le s\le 1}\inf_{1\le l\le q}|s_l - s| \le h, \qquad \sup_{\theta\in s^{n-1}}\inf_{1\le j\le p}|\theta_j - \theta| \le \frac{h}{\pi}. \tag{19}$$

Аналогично (17) допустим, что

$$d^{\mathsf{R}}(h,\rho) = \sup\left\{\|f\|_{L_2(\Omega^n)} : \mathsf{R}f(\theta_j,s_l) = 0,\ j=1,\ldots,p, l=1,\ldots,q, \|f\|_{H_0^\beta(\Omega^n)} \le \rho\right\}, \tag{20}$$

тогда $d^R(h,2\rho)$ представляет собой наибольшую возможную погрешность нахождения функции f по значением $\mathsf{R}f$ в точках (θ_j,s_l), удовлетворяющих условиям (19), при выполнении условия (12).

Если $\|f\|_{H^\beta(\Omega^n)} \le \rho$ и $g = \mathsf{R}f = 0$ в точках (θ_j,s_l), $j=1,\ldots,p$, $l=1,\ldots,q$, то

$$\|g\|_{\overline{H}^{\beta+\frac{n-1}{2}}(Z)} \le c_1(\beta,n)\rho, \tag{21}$$

где $c_1(\beta,n)$ - некоторая постоянная.

Для $\Omega = S^{n-1} \times (-1,+1)$ и $\Omega_h = \{(\theta_j, s_l): j = 1,..., p, \quad l = 1,..., q\}$ достаточно с помощью локальных координат установить взаимно однозначное соответствие между пространствами Соболева $\overline{H}^{\beta+\frac{n-1}{2}}(Z)$ и $H^{\beta+\frac{n-1}{2}}(\Omega)$, при этом если $\beta + \frac{n-1}{2} > \frac{n}{2}$, то

$$\|g\|_{L_2(Z)} \le c_2(\beta, n) h^{\beta+\frac{n-1}{2}} \rho \qquad (22)$$

где $c_2(\beta, n)$ - некоторая постоянная. Получили, что

$$\|\mathsf{R}f\|_{L_2(Z)} \le \varepsilon = c_2(\beta, n) h^{\beta+\frac{n-1}{2}} \rho, \ \|f\|_{H_0^{\beta}(\Omega^n)} \le \rho . \qquad (23)$$

а с учетом (15) и (16)

$$\|f\|_{L_2(\Omega^n)} \le c(\beta, n) \varepsilon^{\frac{2\beta}{n-1+2\beta}} \rho^{\frac{n-1}{n-1+2\beta}} \le c_3(\beta, n) h^{\beta} \rho , \qquad (24)$$

т.е. если $\beta > \frac{1}{2}$, то найдется такая константа $c(\beta, n)$, что

$$d^{\mathsf{R}}(h, \rho) \le c(\beta, n) h^{\beta} \rho \qquad (25)$$

Выводы

Отсутствие однозначного восстановления бесконечно дифференцируемой функции по конечному числу проекций порождает погрешность неопределенности (погрешность восстановления), которая устраняется ограничением вариаций этой функции, измеряемой с помощью нормы в пространстве $H_0^{\beta}(\Omega)$. В свою очередь это позволяет сократить число объектов, удовлетворяющих классификационным признакам, при их идентификации.

Литература

1. Маловик К.Н. Развитие научных основ повышения качества оценивания и прогнозирования ресурсных характеристик сложных систем. – Севастополь: СНУЯЭиП, 2013. – 322.

2. Экологический мониторинг курортно-туристических ресурсов Крыма / И.Д. Кудрик, Н.И. Ковалев, С.Г. Белявский и др. – Севастополь: Изд-во «Черкасский ЦНТЭИ», 2013. – 257 с.

3. Капченко Р.Л. Робітничий потенціал Криму. – Київ: ІПК ДСЗУ, 2010. – 48 с.

4. Резонансы в физике. Том 1. Квантовая механика и магнетизм / В.А. Пухлий, Ж.А. Пухлий, Н.И. Ковалев. – Севастополь: Изд-во «Черкасский ЦНТЭИ», 2011. – 586 с.

5. Волновые задачи акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Маципура. – Киев: Интерсервис, 2013. – 572 с.

6. Natterer F. Some nonstandard Radon problems. – Teubuer: Application of Mathematics in Technology, 1984. – 343 p.

7. Louis A.K. Analytische Methoden in der Computer Tomographie. – Habilitationsschrift: Fachebereich Mathematik der Universitet Munster, 1981. – 220 с.

Надійшла 15.08.2014 р. Рецензент: д.т.н., проф. Скрипник Л.В.