

- Незначна кількість математичних операцій при реалізації методу дозволяє оцінювати ступінь неузгодженості гістограм в режимі реального часу;
- Система виявлення слабо інтенсивного джерела радіоактивного випромінювання, побудована на базі інформаційного методу, є детермінованою, причому детермінованість збільшується при збільшенні часу впливу джерела радіаційного випромінювання.

Література

1. Забулонов Ю.Л., Буртняк В.М.. Система контроля и слежения за хранением ядерных материалов. // 36. наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці НАНУ. „Моделювання та інформаційні технології”– К., 2008. - Вип. 47. – С.107-118.
2. Л. Яноши. Теория и практика обработки результатов измерений. Перевод с английского Н.П. Клепикова. 2-ое изд. – М.: Мир, 1968. – 464 с. (L. Janossy. Theory and Practice of the Evaluation of Measurements. Oxford, Oxford University Press, 1965.)
3. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. — 830 с.

В статті запропоновано новий метод порівняння гістограм апаратних спектрів радіоактивного випромінювання, який базується на вимірюванні кількісних характеристик інформації, що міститься в одержаних гістограмах. Описано алгоритм застосування цього методу для виявлення нестационарних джерел радіоактивного випромінювання інтенсивність яких незначно перевищує рівень фону. Наведені переваги даного методу.

В статье предложен новый метод сравнения гистограмм аппаратных спектров радиоактивного излучения, основанный на измерении количественных характеристик информации, содержащейся в полученных гистограммах. Описан алгоритм применения этого метода для выявления нестационарных источников радиоактивного излучения, интенсивность которых незначительно превышает уровень фона. Показаны достоинства данного метода.

A new method for comparing histograms of the hardware spectra of radioactive radiation, based on measuring of the quantitative characteristics of the information contained in the obtained histogram, is proposed in this paper. The algorithm of applying this method to detect nonstationary sources of radiation with background level intensity is described. The advantages of this method are shown.

Рецензент : д.т.н., проф. Азаров О.Д.
Надійшла: 22.02.2011

УДК 004.942 + 623.454.862

Дивизинюк М.М.¹, Гончаренко Ю.Ю.¹,
Ревунова Е.Г.², Забулонов Ю.Л.², Одукалец Л.А.²

¹ Севастопольский национальный университет ядерной энергии та промисловості
² Інститут геохімії навколишнього середовища НАН та МНС України

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМУМА ОШИБКИ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Введение

Во многих практических приложениях требуется решать дискретную обратную задачу вида:

$$\Phi x = y, \quad (1)$$

где матрица $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times N}$ и вектор $y \in \mathbb{R}^N$, искаженный аддитивным шумом $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ $y = y_0 + \varepsilon$, известны и получены в результате оцифровки интегрального уравнения первого рода [1, 2, 3]. Требуется оценить вектор сигнала $x \in \mathbb{R}^N$.

В случае, когда y содержит шум, ряд сингулярных чисел σ_i матрицы Φ плавно спадает к нулю, Φ имеет высокое число обусловленности $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$, задачу оценки x называют

дискретной некорректной обратной задачей [1]. Такие свойства Φ характерны для задач спектроскопии [4], гравиметрии [5], электроразведки [6].

Решение дискретной некорректной обратной задачи как задачи наименьших квадратов [7]

$$x' = \operatorname{argmin}_x \|y - \Phi x\|_2 \quad (2)$$

на основе псевдообращения

$$x' = \Phi^+ y \quad (3)$$

является неустойчивым [1, 2]. Признаком неустойчивости является то, что малым изменениям вектора y соответствуют большие изменения решения x' ; при этом велико значение ошибки решения.

Для преодоления неустойчивости и, соответственно, повышения точности решения используют регуляризацию [1, 2, 3, 7]. Регуляризация накладывает некоторые ограничения на решения, которые позволяют повысить их устойчивость – например, малость l_2 -нормы решения $\|x'\|_2$. Классическим методом регуляризации является регуляризация Тихонова [1]. Задачу регуляризации Тихонова формулируют следующим образом

$$x' = \operatorname{argmin}_x (\|y - \Phi x\|_2 + \lambda \|x\|_2), \quad (4)$$

где λ – параметр регуляризации.

Недостатками, присущими методам решения дискретных некорректных обратных задач на основе регуляризации Тихонова, являются высокая вычислительная сложность и сложность подбора правильного параметра регуляризации, от которого в значительной мере зависит устойчивость решения. Поэтому востребованными являются альтернативные подходы к решению дискретной некорректной обратной задачи с точностью на уровне регуляризации Тихонова, но с меньшей вычислительной сложностью.

Нами разрабатывается подход к решению дискретной некорректной обратной задачи с использованием методов псевдообращения и случайных проекций [8, 9]. В данной работе приводятся результаты исследования составляющих ошибки решения, полученных данным подходом, и их сравнение с ошибкой традиционных подходов. В качестве экспериментального материала используются известные примеры обратных задач [10, 11, 12]. Показано убывание составляющей смещения и рост составляющей дисперсии ошибки решения с ростом размерности проекционной матрицы, наличие минимума ошибки и возможность получения решения с хорошей точностью без использования регуляризации Тихонова.

Рандомизированная аппроксимация наименьших квадратов

При большой размерности матричных данных классические алгоритмы не всегда могут обеспечить эффективную обработку. Традиционные алгоритмы предназначены для обработки матриц, элементы которых заданы с высокой точностью, что не всегда оправдано, так как данные в больших матрицах часто уже изначально неточные. Кроме того, в некоторых приложениях передача данных может составлять значительную долю общих вычислительных затрат, поэтому требуются алгоритмы с меньшим количеством проходов по данным и позволяющие использовать мощности новых процессорных архитектур, оптимизированных под специфические векторные операции. Для преодоления этих проблем недавно появились и активно развиваются подходы к матричной обработке с использованием рандомизированных алгоритмов [13].

Следует отметить, что рандомизированные алгоритмы, как показывают оценки их точности, часто являются более точными и надежными, чем детерминированные. И, хотя их результаты носят вероятностный характер, вероятность ошибки может регулироваться путем выбора параметров и достигать малых значений (например, менее 10^{-15}), сохраняя при этом преимущества по вычислительным затратам.

Рандомизация может реализовываться путем случайного сэмплирования (выборки), случайной проекции, или их комбинации [14, 15]. Под сэмплированием здесь понимается получение некоторого случайного подмножества матрицы – отдельных элементов (компонентов, ячеек) либо столбцов и строк, в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Проецирование есть случайное линейное отображение (вложение), реализуемое, как правило, с помощью умножения на случайную матрицу, компоненты которой генерируются в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Как сэмплирование, так и проецирование уменьшают размерность исходной задачи и, соответственно, вычислительную сложность последующей обработки.

На работы по рандомизированным матричным алгоритмам существенно повлияло направление случайных вложений. В работе [16] показано, что попарные евклидовы расстояния между точками во входном пространстве приблизительно сохраняются при отображении точек в евклидово пространство гораздо меньшей размерности с использованием случайного гауссовского проектора. Эта и последующие работы зародили идею, что некоторые вычислительные задачи могут быть решены с большей вычислительной эффективностью, если их предварительно перевести в пространство меньшей размерности.

В ряде работ изучался вопрос уменьшения вычислительных затрат на реализацию самого отображения. В [18] показано, что дискретные случайные матрицы с компонентами $\{-1,0,1\}$ работают почти так же хорошо, как гауссовы матрицы. В [19,7] рассмотрены сильно разреженные (и поэтому потенциально быстрые) дискретные случайные матрицы, однако эти работы не были применены к численным методам линейной алгебры. Быстрое преобразование Джонсона-Линденштрауса, которое сочетает скорость быстрого преобразования Фурье со свойствами вложений, имеющимися у гауссовой матрицы, вызвало существенный интерес в данной области. В частности, применение этого метода к аппроксимации матриц [20] привело к созданию самых быстрых алгоритмов, известных в настоящее время.

В рандомизированных алгоритмах быстрого решения задачи аппроксимации методом наименьших квадратов рандомизация рассматривается как умножение входной матрицы A и вектора b на специально сконструированную, не зависящую от данных, случайную матрицу S (зачастую построенную из нескольких других матриц).

Решение дискретной некорректной обратной задачи методом случайных проекций

Нами разрабатывается подход к решению дискретной некорректной обратной задачи, использующий проекционную версию рандомизированных алгоритмов приближения матриц [13]. В качестве проектора $R \in \mathcal{R}^{k \times N}$ используется матрица с элементами, сформированными реализациями случайной величины [14, 15]. Случайные проекционные матрицы с $k < N$ используются также в теории [16, 17] и практике [18] вложений векторных пространств (vector space embeddings) для сокращения размерности векторов с целью ускорения оценки их сходства.

Для решения обратной задачи с использованием проекционного подхода [19] умножим обе части исходного уравнения (1) на матрицу $R \in \mathcal{R}^{k \times N}$, $k \leq N$, элементы которой – реализации случайной величины с нормальным распределением, нулевым средним и единичной дисперсией. Число столбцов N матрицы R определяется размерностью исходной матрицы Φ , число строк k априори не фиксировано.

Получим уравнение

$$Ax = b, \text{ где } A=R\Phi, A \in \mathcal{R}^{k \times N}, \quad (5)$$

$$b=Ry, b \in \mathcal{R}^k. \quad (6)$$

Тогда задача наименьших квадратов (2) записывается в виде

$$x' = \operatorname{argmin}_x \|Ax - b\|_2. \quad (7)$$

Восстановление сигнала x на основе псевдообращения получим, как

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}. \quad (8)$$

Точность решения обратной задачи будем оценивать с помощью ошибки d восстановления истинного сигнала \mathbf{x} , вычисляемой как

$$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\mathbf{e}\|, \quad (9)$$

где \mathbf{x}' – вектор восстановленного сигнала, \mathbf{e} – вектор ошибки решения.

Составляющие ошибки восстановления истинного сигнала

Вектор ошибки \mathbf{e} представляют [20, 21] в виде суммы двух составляющих – дисперсии и смещения. Составляющие вычисляются следующим образом. Пусть \mathbf{P} – оператор, преобразующий \mathbf{y} в \mathbf{x}' : $\mathbf{x}' = \mathbf{P} \mathbf{y}$, тогда с учетом $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ выражение для оценки \mathbf{x} можно представить в виде:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P} (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{P} \mathbf{y}_0 + \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P} \Phi \mathbf{x} + \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}; \quad \mathbf{y}_0 = \Phi \mathbf{x}. \quad (10)$$

Используя выражение для \mathbf{x}' , получаем выражение для \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} = \mathbf{P} \Phi \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{P} \Phi - \mathbf{I}) \mathbf{x} + \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (11)$$

Таким образом,

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \text{где } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{e}_1 = (\mathbf{P} \Phi - \mathbf{I}) \mathbf{x}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (12)$$

\mathbf{e}_1 называют смещением, \mathbf{e}_2 – дисперсией [20, 21].

$$\mathbf{y}' = \Phi \mathbf{x}' = \Phi \mathbf{P} (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}); \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{y}' - \mathbf{y}_0 = \Phi \mathbf{P} \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \Phi \mathbf{P} = (\Phi \mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \Phi \mathbf{P}; \quad (14)$$

Таким образом,

$$\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{y1} + \mathbf{e}_{y2}, \quad \text{где } \mathbf{e}_{y1}, \mathbf{e}_{y2} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{e}_{y1} = (\Phi \mathbf{P} - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{e}_{y2} = \boldsymbol{\varepsilon} \Phi \mathbf{P}. \quad (15)$$

\mathbf{e}_{y1} называют смещением, \mathbf{e}_{y2} – дисперсией [20, 21].

Решение на основе разложения по сингулярным значениям

$$\mathbf{x}_{\text{SVD}} = \Phi^+ \mathbf{y}, \quad \mathbf{P}_{\text{SVD}} = \Phi^+ = \mathbf{V} \text{diag}(f_i / \sigma_i) \mathbf{U}^T, \quad (16)$$

где \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{S} – результат сингулярного разложения матрицы $\Phi = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$,
 $\sigma_i = \text{diag } \mathbf{S}$ – сингулярные числа, элементы диагональной матрицы \mathbf{S} ;

$$\mathbf{y}' = \Phi \mathbf{P}_{\text{SVD}} (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \mathbf{P}_{\text{SVD}} = \mathbf{V} \text{diag}(f_i / \sigma_i) \mathbf{U}^T; \quad (17)$$

$$\mathbf{e}_{y \text{ SVD}} = \Phi \mathbf{P}_{\text{SVD}} \mathbf{y}_0 + \Phi \mathbf{P}_{\text{SVD}} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{e}_{y1 \text{ SVD}} = (\Phi \mathbf{P}_{\text{SVD}} - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{e}_{y2 \text{ SVD}} = \Phi \mathbf{P}_{\text{SVD}} \boldsymbol{\varepsilon}; \quad (18)$$

Фильтрующие множители f_i для различных методов вычисляются поразному.

Для метода псевдообращения $f_i = 1$ при $\sigma_i > \text{resh}$, иначе $f_i = 0$,
 и $\text{resh} = \max(k, N) \text{eps}(\max(\sigma_i))$, $\text{eps}(a)$ – положительное расстояние от $\text{abs}(a)$ до следующего, большего по величине числа с плавающей точкой, имеющего ту же точность, что и a .

Для регуляризации по Тихонову стандартного вида $f_i = \sigma_i^2 / (\sigma_i^2 + \lambda^2)$.

Различным методам решения задачи (1) соответствуют операторы \mathbf{P} разного вида:

- проектора \mathbf{R} , преобразующего вектор правой части \mathbf{y} уравнения (1) в вектор \mathbf{b} ,
- оператора \mathbf{P}_{Pr} , преобразующего \mathbf{b} в \mathbf{x}'_{Pr} ,

- оператора Φ , преобразующей x в y ,
- оператора P , преобразующего (10) y в x' .

После проецирования составляющие ошибки решения принимают следующий вид. Аналогично (11), можно записать (см. также рис. 1):

$$e_{Pr} = x'_{Pr} - x = P_{Pr} R y - x = P_{Pr} R(\Phi x + \varepsilon) - x = (P_{Pr} R\Phi - I) x + P_{Pr} R\varepsilon. \quad (19)$$

Для решения на основе псевдообращения:

$$P_{pinPr} = C \text{diag}(g_i/s_i) B^T, \text{ при } s_i > \text{tresh } g_i = 1, \text{ иначе } g_i = 0, \text{ tresh} = \max(k, N) \text{eps}(\max(s_i)) \quad (20)$$

где B, C, Σ – результат сингулярного разложения матрицы $A = B \Sigma C^T$, $s_i = \text{diag } \Sigma$ – сингулярные числа, элементы диагональной матрицы Σ .

Составляющие ошибки

$$e_{1pinPr} = (P_{pinPr} A - I)x, e_{2pinPr} = P_{pinPr} R\varepsilon; e_{1pinPr} + e_{2pinPr} = e_{pinPr}, \quad (21)$$

где e_{pinPr} – ошибка решения для оценки вектора сигнала на основе псевдообращения с использованием случайных проекций.

Для регуляризации Тихонова по методу фильтрованного сингулярного разложения [1]:

$$P_{regPr} = A^+ = C \text{diag}(\varphi_i/s_i) B^T, \quad (22)$$

где $\varphi_i = s_i^2 / (s_i^2 + \lambda^2)$ – фильтрующие множители.

$$e_{1regPr} = (P_{regPr} A - I)x, e_{2regPr} = P_{regPr} R\varepsilon; e_{1regPr} + e_{2regPr} = e_{regPr}, \quad (23)$$

где e_{regPr} – ошибка решения для оценки вектора сигнала на основе псевдообращения с использованием случайных проекций.

Для решений, полученных с помощью случайной проекционной матрицы, можно построить зависимость от размерности матрицы k нормы смещения $e_1 = \|e_1\|_2$ и дисперсии $e_2 = \|e_2\|_2$, а также суммарной ошибки $e = \|e_1 + e_2\|_2$. Пример этих зависимостей для дискретной некорректной задачи Phillips [24] и метода проецирования случайной матрицей $G(k \times n)$ при уровнях шума $1E-3, 1E-5, 1E-7$ приведен на рис.1.

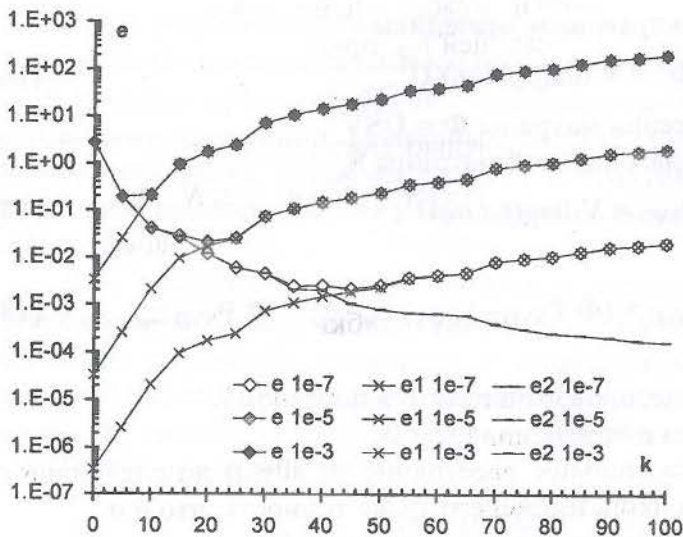


Рис. 1. Зависимость ошибки решения e , ее смещения e_1 и дисперсии e_2 от размерности случайной проекционной матрицы k

определение оптимального значения k по графикам зависимости ошибки восстановления

При возрастании k $\|e_1\|$ уменьшается и $\|e_2\|$ возрастает, так что $\|e_1 + e_2\|$ имеет минимум. Такое поведение этих зависимостей характерно для задач выбора моделей, где модель оптимальной сложности обеспечивает минимум ошибки. Такой характер поведения ошибки имел место для всех исследованных нами некорректных обратных задач при уровне шума выше некоторого минимального.

Таким образом, для получения решения с минимальной ошибкой необходимо использовать случайную проекционную матрицу с размерностью k , близкой к оптимальной. Однако

истинного сигнала от k представляет только теоретический интерес, т.к. выражение включает вектор истинного решения, который при решении практических задач неизвестен.

Чтобы выбрать размерность k проекционной матрицы, при которой ошибка решения близка к минимальной в реальных условиях, т.е. когда точное решение неизвестно, мы предлагаем использовать различные типы критериев выбора k . При этом размерность k выбирается такой, при которой критерий принимает некоторое характерное значение (обычно, минимум или максимум).

В качестве критериев выбора k мы предлагаем использовать критерии выбора модели (КВМ).

Выбор k по критериям выбора модели

В задачах построения моделей используется ряд подходов, в том числе линейные модели, нейронные сети, классификация и регрессия на основе деревьев, ядерные методы, и т.д. По заданным данным, обычно состоящим из пар вход-выход, строится модель, связывающая вход и выход. Задача выбора модели – выбрать модель, близкую к оптимальной для определенного приложения.

Методы выбора модели используют различные критерии выбора [25, 26, 27]. КВМ формулируются так, чтобы автоматически уменьшать сложность модели с увеличением уровня шума путем баланса между сложностью модели и ошибки аппроксимации. На оптимальных моделях критерии достигают минимума. КВМ были разработаны на основе различных предположений, например, с использованием ошибки прогнозирования (predictive training error) [26], ошибки обобщения (generalization error) [23, 28], информационных статистик (information statistics) [25], длины описания (description length) [29] и др. В отличие от КВПР, которые разрабатывались для градуального (не дискретного) параметра регуляризации Тихонова λ , КВМ разрабатывались для моделей с дискретной сложностью (например, числом базисных функций s).

Мы исследовали выбор размерности случайной проекционной матрицы с использованием наиболее известных критериев выбора модели: C_p Маллоуза [26], AIC Акаике [25], $gMDL$ Бин Ю [27].

Пусть набор данных D_L представлен L парами $D_L = \{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, L}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times N}$, $y_i = y_{0i} + \varepsilon_i$, ε – гауссовский аддитивный шум. Модель – $y = \mathbf{w}^T \mathbf{x} = f(\mathbf{x})$.

Ошибка прогнозирования – это мера ошибки между оцененными и реальными значениями в точках, соответствующих образцам обучающей выборки:

$$I_{PTE} = E_\varepsilon \|\mathbf{B}\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|^2 = \|\mathbf{B}\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0\|^2 + \text{trace}(\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T),$$

где $\mathbf{B} = \mathbf{X}_s (\mathbf{X}_s^T \mathbf{X}_s)^{-1} \mathbf{X}_s^T$ – отображение \mathbf{y} в оценку моделью (незашумленных) \mathbf{y}_0 , \mathbf{Q} – ковариационная матрица шума, \mathbf{X}_s – данные, соответствующие $s \leq N$ ненулевым компонентам вектора весов (параметров) \mathbf{w} модели сложности s , E_ε – ансамблевое усреднение по шуму.

Критерий Маллоуза C_p [26] дает несмещенную оценку ошибки прогнозирования:

$$C_p = RSS + 2\sigma^2 s.$$

где RSS – квадрат нормы невязки \mathbf{y} , σ^2 – дисперсия шума.

При проецировании случайной матрицей приведенные выражения для КВМ соответствующим образом модифицируются.

Выводы.

Проведено разбиение ошибки решения на смещение $\|\mathbf{e}_1\|$ и дисперсию $\|\mathbf{e}_2\|$. Исследование поведения этих составляющих ошибки от числа строк k матрицы \mathbf{R} показало, что $\|\mathbf{e}_1\|$ убывает с ростом k , а $\|\mathbf{e}_2\|$ – растет. В рассмотренных задачах для методов $pinv2$ и

$reg1$ соотношение $\|e_1\|$ и $\|e_2\|$ таково, что $\|e_1 + e_2\|$ имеет минимум. С возрастанием уровня шума положение минимума ошибки смещается в область меньших значений k , и значение ошибки в точке минимума возрастает.

При надлежащем выборе k , точность решения методом на основе псевдообращения матрицы с проецированием находится на уровне лучшего метода регуляризации Тихонова без проецирования.

Таким образом, изучение и использование методов на основе псевдообращения с проецированием является перспективным в силу их устойчивости, проявляющейся в плавном изменении относительной ошибки восстановления сигнала с ростом шума, а также в силу снижения вычислительных затрат. Это снижение происходит из-за уменьшения вычислительной сложности сингулярного разложения матрицы A при k , составляющих малую долю N (что особенно проявляется при увеличении уровня шума), по сравнению с сложностью сингулярного разложения исходной Φ . Направлением дальнейших исследований являются экспериментальные и теоретические методы вычислительно эффективного выбора размерности k проекционной матрицы R , при которой достигается ошибка, близкая к минимальной.

Список литературы

1. Hansen P.C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical Aspects of Linear Inversion. – SIAM, Philadelphia, 1998. – 247 p.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285с.
3. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 239 с.
4. Забулонов Ю.Л., Коростиль Ю.М., Ревунова Е.Г. Оптимизация решения обратной задачи по восстановлению функции плотности распределения поверхностных загрязнений // Сборник научных трудов ИПМЭ НАН Украины “Моделирование и информационные технологии”. – 2006. – С. 77 – 83.
5. Булах Е.Г. О новом аппроксимационном подходе к решению обратных задач гравиметрии в классе трехмерных контактных поверхностей // Докл НАНУ. 2006. № 1. С. 108–112.
6. Хмелевский В.К., Бондаренко В.М. Электроразведка. – М.: Недра, 1999. – 438с.
7. Engl H.W., Hanke M., Neubaer A. Regularization of inverse problems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. – 321 p.
8. Candès E.J., Tao T. Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies? // IEEE Trans. Inf. Theory. – 2006. – V. 52, №12. – P.5406 - 5425.
9. Baraniuk R., Davenport M., DeVore R., Wakin M. A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices // Constructive Approximation. – 2008. – V.28, №3. – P. 253-263.
10. Phillips D.L. A technique for the numerical solution of integral equation of the first kind // J.ACM. – 1962. – № 9. – P. 84-97.
11. Delves L.M., Mohamed J.L. Computational methods for integral equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1985. – 388 p.
12. Carasso A.S. Determining surface temperatures from interior observations // SIAM J.Appl.Math. – 1982. – №42. – P. 558-574.
13. Halko N., Martinsson P.G., Tropp J.A. Finding structure with randomness: Stochastic algorithms for constructing approximate matrix decompositions // ACM Report Caltech. – 2009. – №. 2009-5. – P. 1-82.
14. Sarlos T. Improved approximation algorithms for large matrices via random projections // In Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. – 2006. – P. 143–152.
15. Drineas P., Mahoney M.W., Muthukrishnan S., Sarlos T. Faster least squares approximation // Tech. Rep. 0710.1435. – 2007.
16. Rudelson M., Vershynin R. Sparse Reconstruction by Convex Relaxation: Fourier and Gaussian Measurements // CISS 2006 (40th Annual Conference on Information Sciences and Systems). – P. 207-212.
17. Johnson W.B., Lindenstrauss J. Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space // Contemporary Mathematics. – 1984. – №26. – P.189-206.
18. Ревунова Е.Г., Рачковский Д.А. Повышение точности решения обратной задачи с использованием случайных проекций // International Conference “Knowledge-Dialogue-Solution” (KDS-2), 2009.
19. Revunova E.G., Rachkovskij D.A. Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems // Intern. Journal Information Theories and Applications. – 2009. – V.16. – p.176-192.
20. Забулонов Ю.Л., Лисиченко Г.В., Ревунова Е.Г. Стохастическая регуляризация обратной задачи восстановления параметров поля радиоактивности по данным аэро-гамма съемки // Сборник научных трудов ИПМЭ НАН Украины “Проблемы моделирования в энергетике”. – 2009. – вып.52. – С.89-96

22. Забулонов Ю.Л., Лисиченко Г.В., Ревунова Е.Г. Повышение эффективности решения обратной задачи с использованием проекционного подхода // Сборник научных трудов ИПМЭ НАН Украины "Проблемы моделирования в энергетике". – 2009. – вып.53. – С.94-100
23. Revunova E.G. Study of error components for solution of the inverse problem using random projections // Conf. on Inductive Modeling (ICIM-10). – Eupatoria. – 2010. – V.1. – P.1-7.
24. Ревунова Е.Г. Исследование составляющих ошибки для решения обратной задачи с использованием случайных проекций // Математические машины и системы. – №4. – 2010. – С. 33-42.
25. Ревунова Е.Г. Определение минимума ошибки с использованием критериев выбора модели при решении обратной задачи методом случайных проекций // Индуктивное моделирование сложных систем. – вып.2. – 2010. – Тс.
26. Vogel C.R. Computational methods for inverse problems. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.
27. Goldenshluger A., Pereverzev S.V. Adaptive estimation of linear functionals in Hilbert scales from indirect white noise observations // Probab. Theory Relat. Fields. – 2000. – №118. – P.169-186.
28. Anderson E., Bai Z., Bischof C., Blackford S., Demmel J., Dongarra J., Croz J.Du, Greenbaum A., Hammarling S., McKenney A., Sorensen D. LAPACK User's Guide, Third Edition, SIAM, Philadelphia, 1999.

Проведен сравнительный анализ решений дискретных некорректных обратных задач, полученных в результате оцифровки интегрального уравнения. Использовались методы псевдообращения и регуляризации Тихонова, и эти же методы с использованием дополнительного проецирования случайной матрицей. Исследована зависимость составляющих ошибки решения (смещение и дисперсия) от размерности матрицы проектора. При использовании проецирования, метод псевдообращения продемонстрировал точность на уровне регуляризации Тихонова.

Ключевые слова: дискретная некорректная обратная задача, псевдообращение, регуляризация, проецирование, смещение, дисперсия.

Рецензент: д.т.н., проф. Петров О.С.
Надійшла 22.02.2011